生活中的运筹学

韩红梅◎著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

为了帮助对运筹学感兴趣的读者掌握最基础也最实用的运筹方法，本书分 10 章阐述了运筹学中最基本的思想，基本涵盖了运筹学的知识范围。每个章节分为理论知识和问题分析两部分，其中，理论知识部分讲述的是运筹学中的基本思想和基本方法，问题分析部分则结合生活中的实际问题，用运筹的方法来寻找这些问题的最优解决方案。通过全方位地讲解运筹原理和思想，用运筹方法分析实际问题，让广大读者能够深入体会运筹学的智慧，锻炼自己的运筹规划思维，并且能从运筹规划的角度来看待这个世界。

本书在力求科普运筹知识和方法的同时保持趣味性和实用性，确保理论知识的准确和全面，特别适合想要运筹学入门的读者、想要学习运筹规划方法的读者、想要锻炼数学思维的读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

生活中的运筹学 / 韩红梅著. —北京：电子工业出版社，2017.7

ISBN 978-7-121-31673-9

Ⅰ. ①生… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①运筹学－普及读物 Ⅳ. ①O22-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 120588 号

责任编辑：李　冰
特约编辑：田学清　赵海军等
印　　刷：三河市华成印务有限公司
装　　订：三河市华成印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　　　邮编：100036
开　　本：720×1000　1/16　　印张：14.75　　字数：307 千字
版　　次：2017 年 7 月第 1 版
印　　次：2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：49.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：libing@phei.com.cn。

前 言

运筹学是一门比较年轻的学科，但这并不意味着运筹学不重要。在现代社会中，运筹学显得越来越重要，甚至可以说，运筹学理论的不断进步对现代社会的进步具有深刻的影响。运筹学早已不再局限于数学领域，在其他行业也发挥了巨大的作用。例如，计算机的发展就利用了运筹学的理论，人工智能、大数据、图像识别、语音识别等技术都需要用到运筹学的理论。另外，在当今热门的金融行业，运筹学更是重中之重，投资组合优化归根到底就是一个运筹问题。没有运筹学，就不会有层出不穷的金融产品，就不会有令人眼花缭乱的投资选择。

以上讲述的是运筹学在当今社会中的宏观作用，从微观的角度来看，运筹学已然不是那种可学可不学的学科，每个现代人都需要懂一点运筹学，掌握运筹学的基本思想和基本方法。在日常生活中，我们遇到的许多问题都能够从运筹学的思想中得到启发，都需要用运筹规划的方法来解决，例如，在理财时采用什么样的理财方式能让收益最大，在买房时怎样根据自己的条件选择最合适的房子，在做项目时怎样制订计划能够充分利用时间，确保项目高效地完成。此外，我们碰到的许多现象也可以用运筹学的思想来解释，从而让我们看到这些现象背后的本质，例如，商家之间的价格战、婆媳之间的斗争、委托人和代理人之间的关系等。

事实上，有许多人认识到了运筹学的重要性，但是惧怕运筹学这门学科的难度，就不愿去了解这门有用的学科，这无异于因噎废食。其实，绝大多数人学习运筹学，只需要了解运筹学中的基本思想和基本方法，这和那些前沿的运筹学理论是两回事。运筹学的基本思想和基本方法都是实实在在的、看得见的、人类自古以来就不断改进的智慧，现在的运筹学只不过是将这些思想和方法系统化、抽象化，再加以创造得到的新兴学科。古时候，虽然没有运筹学，但是也有许多运筹的典故流传下来，这里面就包含着运筹的思想和方法，如大家所熟知的田忌赛马的故事。既然古时候的人们就已经掌握了运筹的某些方法，这足以证明运筹学的基本思想和基本方法是非常简单且切合实际的，至少比量子力学、计算机科学等学科要容易理解。另外，这也证明了运筹的思想从古至今都在为人们的规划决策提供帮助，能够帮助我们解决一些复杂的，甚至看起来无解的实际问题。

另外，在现实生活中，虽然有些人从来没有学过运筹学，但在他们的规划和决策中都体现了一些运筹思想和方法，这是他们从实际问题中得到的运筹经验。这是因为运筹这门学科是非常符合人性、贴合实际的，它的本质就是探讨如何才能获得最大利益，是每个人每天都在不断思考的基本问题。无论是博弈，还是规划，或者计划，我们的目的都是尽可能地做出最优的决策，让自己获得最大的利益，而如何才能利用现有的条件获得最大的利益，这就是运筹学要研究的，也是运筹学要教会我们的。通过本书，读者就能迅速对那些运筹的基本思想和基本方法有一个系统的理解，而不再局限于现实中缓慢得到的运筹经验。

本书由平顶山学院的韩红梅编写。因受作者水平和成书时间所限，书中难免有疏漏和不当之处，敬请指正。

本书内容及体系结构

本书在结构上分为 10 章。第 1 章引导读者进入运筹学的世界，将运筹学和读者的日常生活联系起来，让读者感悟到运筹学的奥妙。从第 2 章开始，每章都围绕运筹学中的某个方面展开，结合实际问题，详细介绍了运筹学的基本原理和基本方法，又分为两部分：运筹理论部分和运筹案例部分。

在“运筹理论”部分，讲述了基本的运筹学原理和方法，从各个角度进行详细的阐述，同时在合适的地方配有表格和图片，帮助读者充分理解这些原理和方法。

在“运筹案例”部分，每章精选了多达 5 个典型案例，对每个案例都进行了详细、深入的讲解。这些案例既是运筹学中引发思考的经典问题，又贴近生活实际，能够给我们提供现实的参考价值，帮助我们在现实生活中做出更好的规划和决策。

本书特色

1．理论联系实际，了解运筹思想

本书抛开运筹学中那些深奥的理论知识，只讲述一些生活中能用到、有需要的运筹学基础知识。从每章的理论知识部分就可以发现详略得当，绝不贪多求全，基本的运筹思想和原理讲得多，并且从多个角度进行阐述，讲得非常透彻，保证读者能够完全理解，并从中得到收获。

而那些不常用、学术性过强的运筹学知识就没有出现在本书中，毕竟本书只是一本入门级别的科普类书籍，致力于帮助读者运筹学入门，能够拥有最基本的运筹思想，掌握最基本的运筹规划方法。

2．语言通俗易懂，明白运筹原理

为了减少读者的阅读负担，本书在讲解运筹学知识和方法的时候，尽可能地少引用专业术语，并且分点阐述原理、分步介绍方法，保证读者阅读起来能够非常流畅，脑海中的思路能够非常清晰。

此外，本书的计算量非常少，并且所有的计算都只是普通的加减乘除，保证读者能够无障碍阅读，不需要额外的数学功底。但这并不影响知识的讲解和方法的介绍，反而能够让读者增强信心，轻松地领会运筹学的奥妙。

3．案例精挑细选，锻炼运筹思维

全书根据运筹学的框架结构，分为 10 章，所有章节的例题或者故事加起来有 50 个左右，涵盖了各个基本的运筹学原理和方法，都是知识性和实用性并重，在生活中常见的案例。对于每个案例，都用运筹学的方法进行了详细、透彻的分析，保证让读者得到启发。

其中，每章的案例都和该章介绍的运筹学原理息息相关，平均起来一章的案例也就 5 个左右，数量适中，不求多，只求精，并且都是生活中经常遇到的问题，从而让读者可以在了解运筹学的基本原理之后，通过这些案例来锻炼自己的运筹思维。

本书读者对象

- 想要运筹学入门的读者。
- 想要学习运筹规划方法的读者。
- 想要锻炼数学思维的读者。

目录

第 1 章

人人都要懂点运筹学

运筹学是什么？运筹学是帮助我们更好地规划、计划和决策的一门学科。生活中的各种问题都需要经过规划、计划或决策，而运筹学能够帮助我们采取最优的解决方案，能够从中获得最大的收益。

1.1 从一个故事谈起

小明在三年内每年年初都有 3 万元可以用来投资，现在有四种方案供他选择。

方案 1：在三年内投资人应在每年年初投资，一年结算一次，年收益率是 20%，下一年可继续将本息投入获利。

方案 2：在三年内投资人应在第一年年初投资，两年结算一次，年收益率是 50%，下一年可继续将本息投入获利，这种投资最多不超过 2 万元。

方案 3：在三年内投资人应在第二年年初投资，两年结算一次，年收益率是 60%，这种投资最多不超过 1.5 万元。

方案 4：在三年内投资人应在第三年年初投资，一年结算一次，年收益率是 30%，这种投资最多不超过 1 万元。

假如你是小明，你会选择怎样的投资组合方案，让投资得到的总收益最大。

上面就是我们在生活中经常会遇到的投资组合问题。现在，我们周边的投资理财产品越来越多，各种各样的投资方案让人眼花缭乱，每个人都可能成为这个案例中的小明，都需要从众多方案中找到一个完美的投资组合方案，从而让有限的资金能够得到最大的收益。这类投资组合问题就是典型的运筹规划问题，可以用运筹学中的方法来解决，帮助我们找到那个最优的投资组合方案。

回到上面的案例，仔细分析便可以发现，投资组合问题并不简单。案例中的小明可以只选择其中某一种方案将所有资金进行投资，如方案 1，也可以搭配两种方案进行分散投资，如方案 1 和方案 3，还可以搭配三种方案，甚至四种方案一起进行分散投资。同时，分散投资时每种方案分配多少资金也要进行考虑，不同的资金分配比例会影响最后得到的收益。还有，由于投资带来的利息和累积的本金，每年年初的投资金额可能会发生变化，可能需要采用新的投资组合方案。

现在，这个问题我们还不能通过简单的计算得以解决，但是，在运筹学中有线性规划的方法，可以利用方程和图像帮助我们解决这一类型的问题。线性规划就是用来帮助我们求解某些条件下的最优解决方案的。

除了投资理财问题，还有一个非常接地气的问题，就是如何安排一天的家务活。做过家务的人都知道，家务活虽然每件事情都比较小，但是非常琐碎，各种各样的事情非常多，例如，买菜，煮饭，炒菜，刷碗，洗衣，扫地，拖地，烧水，整理杂物，等等。如果一个从没做过家务活的人，让他体验一下，做一天的家务活，那他很有可能会忙得焦头烂额，时间过去了，但是却不能像老手那样井井有条。例如，菜都炒熟了，但是锅里的米饭还是生的；没有将地面扫干净就开始拖地。

其实，如何安排一天的家务活，这也是一个和运筹学相关的问题。在运筹学中有一些帮助我们协调任务、制订计划的方法，能够让我们充分利用时间，更加高效地完成工作。例如，需要做打扫卫生、煮饭、烧水、用洗衣机洗衣服、炒菜这五件事，各需 10、50、15、20 和 15 分钟。如果没有合理计划，只是按照这个顺序逐一完成，则共需要 106 分钟；而如果经过合理计划，按照煮饭、烧水、用洗衣机洗衣服、打扫卫生和炒菜的顺序，完成全部任务则只需要 60 分钟，这节省下来的 46 分钟时间就是合理的计划给我们带来的。

另外，父母和孩子之间的关系中也包含着运筹学的道理。

在很多时候，父母和孩子之间会有意见上的不和。例如，孩子想玩游戏，而父母为了孩子的学习成绩着想，就会不允许孩子玩游戏。这时候，父母和孩子之间就存在一个博弈的过程，这时候会出现四种可能的做法和相应的结果。

（1）父母和孩子都不让步。如果父母想让孩子妥协，孩子想让父母同意，那么，双方就会发生冲突，影响双方的关系和各自的心情，这对于父母和孩子来说都是不利的。

（2）父母和孩子都让步。如果双方都选择妥协，孩子顺从父母的意见，父母又允许孩子的做法，那么，双方谁的意愿都没有达到。

（3）父母让步，孩子不让步。如果父母选择妥协，孩子坚持要玩游戏，那么，父母的意愿没有达到，孩子则得到了想要的结果。

（4）父母不让步，孩子让步。如果父母坚持不允许孩子玩游戏，孩子顺从父母的意见，那么，孩子的意愿没有达到，父母则得到了想要的结果。

从运筹学中求最优的角度来看，在上面四种结果中，从整体的角度来看，最好的结果应该是（3）和（4），因为孩子和父母当中至少有一人满意，不像（1）那样，双方会发生冲突，也不像（2）那样，双方都不会满意。另外，对父母来说，最好的结果是（3），因为这时候父母的意愿得到了满足；对于孩子来说，最好的结果是（4），因为这时候孩子的意愿得到了满足。

因此，当父母和孩子发生意见不合的时候，应该选择一方让步，另一方不让步，也就是一方选择向另一方妥协，这时候，对于整体来说，都比相互妥协和都不让步要好，其中，不让步的一方会得到最好的结果。

在日常生活中也处处充满着博弈，如商家之间的价格战、婆媳之间的斗争、情侣之间的小吵小闹、团队内部成员之间的冲突等，都可以看作双方之间的博弈。博弈是运筹学中非常重要的内容，学习这些能够帮助我们在各种博弈之中做出更有利的决策，就好比赛马过程中田忌采用的策略。

这三个案例也告诉了我们运筹学的主要内容是什么。总结起来，运筹学就是研究怎样利用条件做出合理的规划，如投资组合问题；研究怎样安排任务，制订合理计划，如做家务问题；研究怎样做出决策，从博弈中获得最大收益，如父母和孩子意见不合时的博弈。

1.2　古时候的运筹学

1.2.1　充分利用资源来修复皇宫

北宋真宗年间，首都发生火灾，皇宫被烧为灰烬。丁渭受命主持修复，当时不执行皇命即为抗旨。接旨后他对废墟进行勘察，发现此工程存在三个难题：第一是取土困难；第二是运输困难；第三是清墟排放困难。他找到了主要矛盾后，就征集解决方案。最后他从众多方案中综合出了一个最佳方案，这个方案最终使其成功，提前完成了“皇宫修复工程”。

丁渭的方案是这样的：沿皇宫前门大道至汴水河岸挖道取土，将大道挖成小河道，挖出的土用来烧瓦，解决“取土困难”；挖成河道接通汴水，建筑材料可由小河道直运工地，解决“运输困难”；皇宫修复后，将建筑垃圾填到小河道中，恢复原来的大道，解决“清墟排放困难”。

丁渭修复皇宫的措施很巧妙，当他解决了一个问题时，得到的结果又为下一个问题的解决做好了铺垫，这使他用了很少的时间和经费就修好了

皇宫。他充分把握了各个要素之间的相生关系，运用“大道变河道”、“挖土来烧瓦”、“废墟填河道”这三个事件之间的相生关系，使整个工程系统向有序并且理想的方向发展，最终达到修复皇宫按期完成圣旨的效果。在这个过程中，系统的每个环节彼此之间相连，破坏了其中任何一个事件，整个工程系统都会受到影响。

从上述故事中可以看出，对于一些复杂的问题，运筹就是要充分理解事物之间的本质关系，掌握一些客观的条件，在此基础上，才能找到最优的解决方案。对于特别复杂的问题，如果找到了一个最优的解决方案，那么往往会让人惊叹不已。

1.2.2 以弱胜强的田忌赛马

战国初期，齐威王决定和自己的大将田忌一起赛马，赛马的规则是：先将各自的马分成上、中、下三等，等到比赛的时候，上马对上马，中马对中马，下马对下马。但是在每一个等级中，齐威王的马都要比田忌的马稍强一些，因此，田忌在比赛还未开始时便落于下风。在正式比赛的时候，田忌用自己的马去和齐威王同等级的马进行比赛，果然，上、中、下三个等级的马在比赛时都输了，这次比赛，田忌以 0 ∶ 3 完败于齐威王。这时候，在旁边的孙膑看了，便悄悄地给自己的好友田忌出主意：先用自己的下等马去和齐威王的上等马比赛，接下来再用自己的上等马和中等马依次与齐威王的中等马和下等马进行比赛。田忌听完后，在下一次正式比赛的时候采取了孙膑的建议。果然，毫无悬念地输掉了第一局，但是接下来的两局，田忌的上等马和中等马分别胜了齐威王的中等马和下等马，这次比赛，田忌反败为胜，以 2∶1 赢了齐威王。

田忌赛马的问题其实是一个决策问题，田忌和齐威王的赛马就是一场

典型的博弈。在这场博弈中，田忌的马还是原来的马，但是两场比赛的结果却是千差万别。从 0 ∶ 3 到 2 ∶ 1 的改变正体现出，在博弈过程中，通过运筹规划选出最优的策略，能够发挥出自身最大的优势，甚至能够反败为胜。

1.2.3　抓住重点的围魏救赵

战国时期，魏将庞涓举全国之兵，以突袭的办法将赵国的都城邯郸包围。赵国抵挡不住，向齐国求援。齐王便封田忌为大将，孙膑为军师，率领齐军主力前往救赵。大军已经召集完毕，田忌便想着直奔邯郸，以便击退包围邯郸的魏军。孙膑则提出应该趁着魏国国内兵力空虚，全军直接进攻魏国的都城大梁，迫使魏军放弃围攻赵国都城邯郸，回撤救援。相反，如果齐军直接去救援邯郸，长途行军会使齐军更疲惫，魏军便能以逸待劳，占据先机。

田忌采纳了孙膑的建议，果然，齐军势如破竹，基本没有遇到什么阻碍，就直接打到了魏国的都城之下。庞涓在得知大梁告急的消息之后，连忙命令围攻邯郸的魏军全部撤退，连夜行军，来救援大梁。齐军事先在魏军必经之路的桂陵占据有利地形，以逸待劳，打败了魏军。这就是历史上有名的“围魏救赵”之战。

从运筹学的角度来看，孙膑对魏军的策略进行了预判，并且根据这个预判结果来选择对自己最有利的策略。其实，围魏救赵之战，就是田忌和孙膑统帅的齐军和庞涓的魏军之间的一场博弈。孙膑分析，如果直接去救邯郸之围，那么魏军一定会以逸待劳，这对齐军很不利；但是，如果选择围攻魏国都城大梁，那么魏军一定会回援，这样赵国的困境自然得以解决，齐军还能以逸待劳，设下埋伏。因此，进攻魏国都城大梁对齐军更有利，并且更能达到想要的目标，当然应该选择这种行军策略了。

1.2.4 用博弈的观点来看空城计

看过《三国演义》的人都知道“空城计”的典故，根据罗贯中的描述，话说当时是“马谡拒谏失街亭，武侯弹琴退仲达”。诸葛亮误用马谡，致使街亭失守。诸葛亮自己驻守西城，准备后撤，等到安排停当，忽闻司马懿引大军 15 万蜂拥而来。这时候，诸葛亮身边别无大将，只有一班文官。身边的 5000 名军士，已分一半去运粮草，只剩下 2500 名军士在城中，众官尽皆失色。

接下来的结果想必大家都很熟悉了。诸葛亮没有弃城而逃，而是让士兵打开城门，偃旗息鼓，扮作百姓，洒扫街道，他自己则在城门上焚香操琴。司马懿看到如此景象，心中大疑，便传令退兵，次子司马昭觉得诸葛亮故作此态，司马懿道：“（诸葛）亮平生谨慎，不曾弄险。今大开城门，必有埋伏。我兵若进，中其计也。”遂退兵。

那么，问题来了：在这个脍炙人口的典故中，诸葛亮和司马懿的心理活动是怎样的呢？司马懿真的就这么胆小，带着 15 万魏兵主力却被吓跑？诸葛亮又为何如此自信，就不怕司马懿分兵来一探虚实，或者派军围城？

这背后的学问大着呢，我们可以用运筹学的思想来仔细分析。其实，整个空城计就好比一场精妙绝伦的博弈，博弈的双方分别是诸葛亮和司马懿。整个博弈的背景就是：诸葛亮当时一出祁山不断地取得胜利，魏国君主对诸葛亮束手无策，几经周折后魏国君主才请出司马懿对付诸葛亮，司马懿也不辱使命，街亭一战大败了蜀军。

我们再来分析双方在这场博弈中的策略。对于诸葛亮来说，他的策略无非是这两种，一种是守城，另一种是弃城。而在双方力量的悬殊对比之下，无论是哪一种策略，他都是逃不了司马懿的 15 万大军的。因此，很明显，这场博弈的主动权完全掌握在司马懿手中。

对于司马懿来说，他刚受到君主的重用，有了权力，尤其是魏国君主一直都在提防他，怕他有不臣之心。这时候的司马懿心里很清楚，一旦自己活捉了诸葛亮，那么他在魏国的利用价值也就不大了，魏国君主必定削其兵权，自己终会落得个兔死狗烹的下场。

然而，凭借诸葛亮的机智，他料定司马懿会这么想，并且认定司马懿会在这个节骨眼上放自己一马。凭借这一点认识，诸葛亮只要让司马懿有一个退兵的理由，司马懿就一定会退兵。于是，诸葛亮不慌不忙，打开城门，在城上唱了这么一出“空城计”。司马懿也极力配合，在面对次子的疑惑时，只说诸葛亮从不冒险，既没有试探性进攻，也没有围城，而是选择了退兵。

1.3　现代生活中的运筹学

前面几个例子已经说明了运筹学在生活中的应用，其实，远远不止这些。运筹学已经成为物流运输的理论基础，并且，在个人的学习方法和工作计划中也需要用到运筹学的基本思想。可以说，生活中的一切事情都可以从运筹的角度来思考，用运筹的方法来进行分析，都可以帮助我们找到最优的解决方案，从而获得最大的收益。接下来，我们从学习、工作和物流这三个方面来看看运筹学在生活中的应用。

1.3.1　应聘时，合适比优秀更重要

某所大学的法学院公开招聘两位教授，一位用来教经济法学，另一位用来教民商法学。在经过了笔试和几轮面试之后，最后选拔出甲和乙两位法学教授。现在，学院需要确定在甲和乙两位教授当中，谁去教民商法学，

谁又去教经济法学。目前已知的情况是，经济法学教授的工资是每月 5000 元，民商法学教授的工资是每月 4000 元。之所以经济法学教授的工资要高，是因为法学院准备重点发展经济法学，所有资源都优先分配给经济法学，因而能够用更高的工资来招揽人才。关于甲和乙这两位法学教授，学院了解到两位教授都具有相同的学历背景，都是经济法学博士，并且两位都有过一线民商法学的相关教学经验，其中，甲的民商法学教学经验比乙更加丰富。

根据上述条件，你觉得甲和乙两位法学教授最后分别得到了什么职位呢？

在这个案例中，从甲和乙的能力来说，甲明显比乙更加优秀，因为在学历相同的基础上，甲具有更加丰富的民商法学教学经验。因此，在给两位法学教授安排职位时，如果按照我们的一般思维，则肯定是越优秀的教授应该占据工资更高的职位，因为我们觉得员工的工资和能力应该相匹配，也就得到：甲最后会得到经济法学教授职位，乙最后会得到民商法学教授职位。

但是事实上，这个案例的结局是：法学院决定给甲安排民商法学教授职位，给乙安排经济法学教授职位，看起来更优秀的法学教授甲得到的却是工资更低、更不被重视的职位。原来，学院的招聘负责人在给甲和乙两位法学教授安排职位之前，特地找了甲和乙进行沟通。甲为了证明自己的能力，将自己在民商法学和经济法学上的成果和教学经验一一展示了出来。而乙早在这次谈话前就已经明确了自己的职位目标就是待遇更好、更受重视的经济法学教授，因此，乙在谈话中有的放矢，故意略去了自己在民商法学教学上的背景和经验，全部谈话都在讲经济学，甚至当负责人问他是否考虑过教民商法学时，乙当场就婉拒了。

招聘负责人经过仔细考虑后，最终将看起来更加优秀的甲安排在各方面条件较差的民商法学教授职位上，而乙则如愿以偿，被安排在各方面条件更好的经济法学教授职位上。

在这个案例中，乙能够用统筹的思维看待问题，有明确的职位目标，并且尽可能地向目标靠拢。为了获得各方面条件更好的经济法学教授职位，乙的全部谈话都在突出自己在经济法学上的能力，从而给招聘负责人留下了乙更适合教经济法学的印象，让自己获得了更大的收益。

1.3.2　旅行中，两位游客的索赔困境

话说甲和乙在国外某个旅游景点旅游时，都购买了当地特有的艺术品，都准备带回国。并且，他们在回国的时候，乘坐同一架飞机。不巧的是，等到下飞机后，他们发现各自购买的艺术品都被摔坏了。于是，这两个人都向这家飞机所属的航空公司讨个说法，分别要求航空公司给出合理的赔偿。但是，这两个人彼此之间并不知情。

航空公司的管理人员知道这件事之后，分别向甲和乙两位乘客表示，公司愿意向甲和乙做出补偿。然而，航空公司只知道这件艺术品的价值不超过 100 元，却不能确定这件艺术品的具体价值，更不知道这两位乘客购买艺术品时的价格如何。如果航空公司只向甲和乙当中的一人询问价格，则很有可能甲或者乙会虚报价格，索取高额赔偿。因此，指望通过他们当中的一人来弄清价格，是不现实的。

那么，航空公司的管理人员想出了什么办法呢?

在处理甲和乙的索赔事项的时候，航空公司的管理人员设置了一套特有的机制，将甲和乙分开来，不让甲和乙商量，分别向甲和乙询问这件艺

术品的价格，请每位乘客写下 2～100 之间的任一整数作为这件工艺品的价格。如果两人写的数目相同，则把该数作为真实的价格，而且支付给他们每个人这一数目。但是，如果两人写的数目不同，那么他将假定，较低的数目是真实的价格，写较高数目的那个人是在骗人。这样，他将向他们支付较低的数目，此外还有奖金与罚金，即写较低数目的那个人将多拿 2 元作为诚信的奖励，而写较高数目的那个人将少拿 2 元作为惩罚。比如，如果甲和乙写的都是 78 元，那么这两人各自都能得到 78 元的赔偿；如果甲写的是 56 元，而乙写的是 100 元，那么甲就能拿到 58 元，而乙只会得到 54 元。

甲和乙将会写怎样的数目？如果是你，那你会选择写怎样的数目呢？

上面这个案例是运筹学中的博弈过程，甲和乙无法沟通，但是需要考虑对方可能写什么样的数目，从而确定自己该写哪个数目能够获得更多的赔偿。我们都知道，对于甲和乙两人来说，最好的策略就是都写上 100 元，但是，每个人从自己的利益出发，都会有自己的小算盘。例如，或许甲有自己的小聪明，甲会想到乙会填最大的数目，100 元，因此，甲便会填上 99 元，这样最后就能收获 101 元。但是，甲能想到的乙也能想到，如果乙想得更加深入，便会决定填 98 元，因为乙会想到甲填 99 元，那么乙填 98 元就会收获 100 元……

从这里可以看出航空公司管理人员的机智。如果甲和乙都能够诚实地写出价格，那么这是最好的结果；一旦两人都动了歪心思，那么，两人写的数目也不可能太高，因为谁都会想着写上比对方小 1 的数目，从而拿到更多的赔偿。可以说，航空公司在这次事件的处理过程中不太可能会做出不合理的赔偿。

1.3.3　物流中，疯狂“双 11”背后的运筹逻辑

随着电子商务的成熟，越来越多的人喜欢上了网上购物。网上购物，快捷方便，不用出门，轻轻松松浏览电商平台，选中自己喜爱的商品，只需完成支付，就可以静静地等待快递小哥将这些商品送到面前。通过网购，我们可以买到生活中的绝大多数商品，并且等待的时间变得越来越短，最快的甚至可以当天送达。如今，网上购物已经成了人们一种非常平常的生活方式，甚至创造出了“双 11”这样疯狂的购物节，一天的销售额就能达到上千亿元。

与网上购物密切相关，在电子商务背后默默付出的就是现代的物流系统。可以说，电子商务的兴起，人们网上购物习惯的养成，都是稳定、快捷的物流系统长期支撑的结果。如今，哪怕是“双 11”这天，网购产生的包裹数以亿计，多得仓库都堆不下，物流系统也能承受住这样的冲击，很少出现差错，尽快将包裹送到顾客的手中。

现代物流系统就是以运筹学为理论基础的。运筹学在物流领域的作用是全方位的。

从运输方式上来说，运筹学在物流领域的应用实现了铁路、公路、水运和空运等各种运输方式的合理配置及优化组合，提高了运输效率。

从物资存储上来说，运筹学帮助人们合理地规划物资的存储，从而为生产和生活顺利进行提供稳定可靠的保障，并且能够帮助我们减少资金的占用、减少不必要的周转环节、缩短物资流通周期、加速再生产的过程等。

从路线选择上来说，运筹学能够从两个方面来帮助人们合理地规划运输路线：一方面，运筹学帮助人们找到运输成本最低的路线，从而节省运输开支；另一方面，运筹学帮助人们及时发现交通中可能出现的堵塞现象，选择最流畅的运输路线，确保整个运输过程能够快捷地完成。

此外，在人员分配、商品调动等方面，运筹学也能帮助人们找到最优的解决方案。

1.3.4 交通中，为什么新规不许闯黄灯

“红灯停，绿灯行”，这几乎是所有人都清楚的交通规则。可是，在黄灯时间内该怎么办呢？很多人对这里面的具体规则感到困惑，尤其是在我国交通新规出台之前。

在交通新规出台前，在黄灯时间内，既有不准通行的一面，又有准许通行的一面。当黄灯亮时，马上就要转变为红灯，应将车停在停止线后面，行人也不得进入人行横道。但是，车辆如因距离过近不便停车而越过停止线时，则可以继续通行。当黄灯亮时，已越过停止线的车辆也可以继续通行；已在人行横道内的行人要视来车情况，或尽快通过，或原地不动，或退回原处。

这个规则看似非常人性化，车辆和行人都有一段可以“见机行事”的缓冲时间。在黄灯时间内发生了不少交通事故。造成这些事故的主要原因就是缺乏必要的交通安全意识，甚至有的司机将黄灯看作加速的预告信号，争抢着越过停止线。抢黄灯也许节省了几秒甚至 1 秒，但可能就会发生车毁人亡的惨痛事故。其中，车辆之间会有一个博弈的过程。

当两辆车同时面对黄灯的时候，都有停车或者加速这两种策略，那么，简而言之，会出现三种可能的现象。

（1）如果自己和对方都选择停车，那么这时候双方都没有危险，并且安心等红灯，但是等红灯需要消耗一定的时间。

（2）如果其中一方选择加速行驶，另一方选择停车，那么选择停车的

一方就会不仅要等红灯，还会因为对比而让自己心情不爽；而加速的一方则会有点兴奋，因为不用等红灯。

（3）如果双方都加速通过黄灯，那么双方都是一样的，都不用等红灯。

因此，从运筹学中博弈的角度来看，这两辆车都会争抢着加速通过黄灯，因为如果看到对方车辆在黄灯前停车，那么这时候选择加速不仅不用等红灯，还会因此带来一种兴奋感，这是最好的策略；如果看到对方车辆加速通过黄灯，这时候不选择加速，而选择停车，那么心情会因为比较而不爽，而且还要等红灯，因此，最好的策略也是加速通过黄灯。总之，在这种情形下，许多车辆很容易加速通过黄灯，这时候更容易发生交通事故。

正是因为如此，交通新规扩大了闯黄灯的判定范围，并且加强了闯黄灯的惩治力度，闯黄灯的惩罚程度已和闯红灯相当。虽然这引起了许多人的争议，交通新规也被称为“史上最严交规”，但是，从交通安全的角度来分析，规定车辆需要减速通过黄灯，严惩闯黄灯的现象，这是防止车辆加速通过黄灯的有力措施。

1.4　学习运筹学，到底能得到什么

前面介绍了运筹学在古时候和现代现代生活中的一些应用，其实，运筹学的作用远不止这些。在现代社会，运筹学对于整个社会和现代科技的发展都起到了巨大的作用，并且对其他学科领域有着决定性的影响，如经济学、统计学、计算机科学、物流管理、工商管理等。

要想深刻地体味到运筹学的作用，就不得不提到这一门学科的现代起

源。这门讲究优化的学科最早的应用公认是在第二次世界大战中，话说当时德国凭借强大的空军力量，不停地对英国本土进行轰炸。可是，即使英、美在防空系统中引进了新雷达技术，理论上可以用来更高效地监控来袭的德国轰炸机，然而，实际应用的效果却不是很理想。为此，英、美两国决定成立一个专门的研究小组，由各学科的专家组成，用来研究如何优化运用雷达。

这可以说是第一个运筹学小组，这个小组在第二次世界大战中研究的都是优化类的难题，例如，如何让船队的损失达到最小，如何高效地分配军事资源，等等。整个小组在第二次世界大战中的研究取得了令人惊叹的成果，例如，让船只的中弹率由 47%下降到 29%，让德国潜艇的被摧毁数增加到原来的 4 倍，等等。正是因为这个小组，展现了运筹学的巨大潜力。运筹学发展迅速，它也应用在越来越多的领域，成为现代社会的一门重要学科。

可以说，没有运筹学，就没有现代的计算机，没有繁荣的金融业，没有现在的科技社会。但是，运筹学毕竟还是一门比较年轻的学科，在不断向各领域渗透的同时，它本身也在不断地向前发展，在未来仍然会对我们的社会产生重要的影响。因此，从宏观的角度来看，学习运筹学是在紧跟时代发展的步伐，不让自己的思维落伍。

如果从微观的角度来看，那么学习运筹学带来的好处就更多了。运筹学的应用十分广泛，凡事都讲究一点运筹，就会让你在做规划、做计划、做决策的过程中游刃有余，其所带来的效果都是可以衡量的，可以是各个方面的好处。

例如，在投资方案的选择中，采用运筹方法进行合理规划，就能带来更高的收益，这是金钱上的效果；在制订计划时，采用运筹方法进行合理

安排，从而节省一部分时间，这是时间上的效益；在博弈过程中，用运筹思想做出最佳的决策，从而战胜对手，这是面子上的收益等。总之，学习运筹学，并且应用到生活中的各个方面，能够给我们带来一些意想不到的效果。

第 2 章

线性规划：最简单的运筹方法

线性问题是运筹学中最简单的一类问题，而线性规划也是在我们的实际生活中应用最广泛的运筹知识。可以说，我们每个人都思考过线性问题，都应用过线性规划的方法，只是我们不知道这些问题就是线性问题，自己用的方法就是线性规划的方法。

2.1　外行看懂线性规划

线性规划作为最简单的求最优的运筹方法，发展到现在已经成为运筹学中最成熟的一个分支。线性规划能够帮助我们解决生活与工作中的一些最简单的线性规划问题，帮助我们找到最优的解决方案。

2.1.1　线性问题往往最简单

对于线性规划，首先要了解什么是“线性”。其实，这并不是运筹学所独创的高深概念。通俗地说，线性就是现实世界中最常见的事物之间成比例的对应关系。如果用图形来表示，那么它们之间的对应关系可以用一条稳定的直线来表示，这正是“线性”这个概念的来源。

对于两个事物之间的对应关系，只考虑最简单的情形，它们之间的对应关系可以是成比例的，比如，汽车以一定的速度匀速行驶，它行驶的路程和花费的时间就是成比例的，也就是每行驶一公里所花的时间是相同的，如图 2-1 所示；还有较复杂的，两个事物之间的对应关系也可以是不成比例的，比如，从五楼不小心掉下了一个花盘，花盘下落的距离和时间就不是成比例的，显然，花盘从二楼到地面的时间比从五楼到四楼的时间要短得多，如图 2-2 所示。

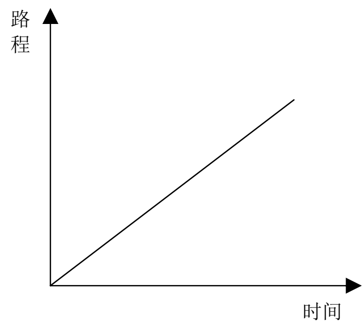

图 2-1　汽车匀速行驶

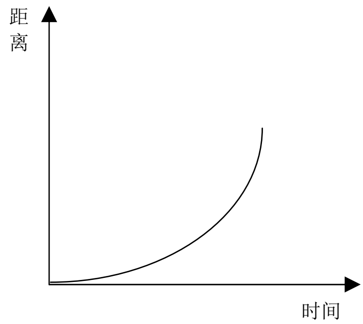

图 2-2　花盘高空下落

对于上面这两类问题，汽车以一定速度行驶，它的路程和时间相互成比例，这就是线性问题；而空中掉下的花盘，下落距离和时间相互不成比例，这就是非线性问题。如果要进一步理解线性和非线性的区别，则可以比较银行储蓄计算利息的两种方式。我们将钱存进银行，期限为 10 年，每年按照年利率结算利息。如果银行给出的利率是单利，也就是利息不纳入本金，那么我们 10 年后得到的总利息就很容易计算：总利息=本金×年利率×10，这就是简单的线性问题，如图 2-3 中的直线 a；如果银行给出的利率是复利，也就是常说的“利滚利”，将每年的利息纳入本金，那么我们 10 年后得到的总利息就是：总利息=本金×(1+年利率)^{10}−本金，这就是指数形式增长，比前面的式子复杂，这不是线性的，如图 2-3 中的曲线 b。通过图 2-3 也可以形象地得到：刚开始的时候，复利得到的利息比单利要少，但是过了一段时间之后，复利带给我们的利息就比单利多得多了。

对于一个线性问题，所表示的直线往往又有所不同，有的是上升的直线，意味着两者中的一个随着另一个的增加而增加；有的则是下降的直线，意味着两者中的一个随着另一个的增加而减小。例如，汽车匀速行驶下，路程和时间之间的关系就应该用上升的直线来表示（见图 2-1）；同样，单利储蓄下，总利息和时间之间的关系也应该用上升的直线来表示（见

图 2-3）。而对于工作中常见的工作时间和剩余工作量之间的关系，则用下降的直线来表示，因为在一定的效率下，工作时间越长，完成的工作量就越多，剩余的工作量就越少，如图 2-4 所示。

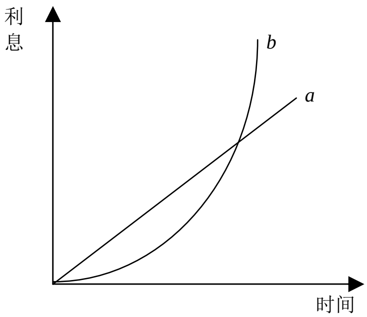

图 2-3　单利和复利下的储蓄利息

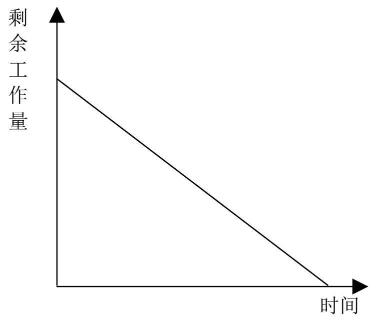

图 2-4　剩余工作量和工作时间的线性关系

现在你已经了解了什么是线性问题，你可能会说，生活中还是非线性问题更多，如汽车行驶前的加速过程、股票的变化趋势、人对新事物的学习过程、二手车的价格和行驶里程等。但是，生活中还有许多看似不是线性的问题可以转化成线性问题，从而大大简化解决这类问题的难度。例如，在日常生活中，与企业相关的生产资源利用、人力资源分配、生产设备管理等，与个人相关的时间分配、购物规划等，这些问题本质上就是线性问题，可以运用线性规划的方法来解决。

2.1.2　用图像和方程来描述线性问题

那么，怎么解决这些线性问题呢？这需要准确把握两个事物之间的线性关系，其中最形象的做法是用图像来表示这些线性问题，最准确的做法是用一个方程来表示两者之间的线性关系。并且，线性关系中图像和方程也是一一对应的，也就是一种线性关系只能由一个方程和一幅图像来表示。

如何画出两个事物之间的线性关系图像呢？主要可以利用两点确定一条直线的思想来画出两个事物之间的线性关系图像。因此，可以执行以下三个步骤。

第一步：明确两个事物之间是否具有线性关系。只有线性关系的图像才会是直线的，因此不能将非线性关系用这种方法来作图。例如，商品产量和原料之间的关系就是线性关系，可以用这种两点一线的方法来作图。

第二步：找到这种线性关系中的两个点。例如，对于商品产量和原料关系，可以找到两个不同产量下，产量和原料一一对应的两个点 A 和 B。

第三步：将确定的两点连线，但要注意一些边界条件。例如，将上述步骤中确定的两点连线，从而得到一条直线，这条直线就表示商品产量和原料之间的关系，只要知道了原料 x，根据这条直线，就能找到与之对应的点 C，从而确定相应的产量 y，如图 2-5 所示。特别的，这里的边界条件就是产量和原料不能是负数。

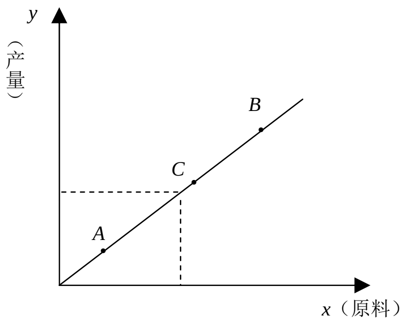

图 2-5　原料和产量关系图

线性关系同样可以用方程的形式来表示。如果在实际生产应用中，已知图 2-5 中 A 点的坐标是(50, 40)，B 点的坐标是(150, 120)，由于产量和原料之间是线性关系，那么产量和原料之间的具体关系可以用一个方程来表示：$y=0.8x$，其中 x 表示原料，y 表示产量，0.8 表示它们之间的系

数。图 2-5 中的直线就可以用这个方程来表示。这个方程是怎样得来的呢？由 A 和 B 两点可以得到：$\frac{120-40}{150-50}=0.8$，因此 0.8 就是它们之间的比例。根据方程，我们可以根据 C 点的 x 值得到它的 y 值，也就是得到在原料为 x 的情况下的产量。如果 $x=100$，那么 $y=80$，如表 2-1 所示。

表 2-1　原料和产量之间的对应关系

	A	B	C
原料（x）	50	150	100
产量（y）	40	120	80

上述方程准确地反映了两个事物之间的线性对应关系，这样的方程又叫作线性方程。因此，在实际生活中，我们需要用方程来解决线性问题，在线性规划方法中，也需要用到方程来进行准确的分析，才能得到最后准确的解决方案。总之，图像和方程是整个运筹学中最基础的两个工具，前者用于定性分析，形象生动；后者用于定量分析，准确无误。

2.1.3　几个线性关系之间的较量

看了前面的图像和方程，这还只是确保让我们知道用怎样的工具来分析线性规划乃至运筹学的相关问题。那么，到底什么是线性规划、什么问题才需要线性规划呢？

前面我们了解的都是单个的线性问题，但在现实生活中并不总是如此。生活是非常复杂的，往往是各种线性关系交叉在一起，并且受到现实条件的制约，而我们往往需要寻找这些问题中最优的一个或者几个解决方案，这就是线性规划。总之，在线性规划中，“线性”意味着问题中包含的都是线性关系，“规划”则是指寻找问题的最优解决方案。例如：

假设你有一家工厂，在实际生产应用中，不同产品需要不同量的几种原料进行生产，并且产品的生产时间和利润也各不相同，那么，你会如何分配原料、安排生产，以求利润最大化呢？假设你有一家物流公司，你接到一份运输物资的订单，在物资调配过程中，不同的卡车吨位不同，并且每天能够往返的次数也不同，不同卡车的单次运输成本也有差异，那么，你会如何安排你所拥有的卡车进行运输，以最低的成本实现订单的需要呢？还有，个人生活中的任务安排问题、购物规划问题等也需要类似的规划，以达到最大化完成任务或者最小化购物支出的目的。

上述问题都是线性规划问题，我们可以发现，在这些问题中没有哪个只是包含一种线性关系，每个问题中都包含了各种各样的线性关系，它们彼此交叉、相互制约。例如，在生产问题中，每种产品的产量和原料是一种线性关系，其利润和产量又是另一种线性关系，甚至这些关系都是在一定条件下才能成立的，因为每天的生产时间是规定的，并且生产原料也是有限的。从这里面可以看出线性规划问题往往涉及多个线性问题，这是多个线性关系之间的一场较量，最优的解决方案必须是考虑了所有条件、权衡了各方轻重才得到的。注意，如果含有非线性关系，就不能运用线性规划的方法。

在运筹学中，线性规划是研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种基本的数学方法。作为运筹学的一个重要分支，线性规划广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面，从而能够合理地利用有限的人力、物力、财力等资源做出最优决策。

2.2　生活中的线性规划

线性规划无非就是对线性问题的最优化处理。在日常生活中，每个人都用过线性规划的思想来处理一些简单的问题。

2.2.1　如何选择手机

【背景】

俗话说“便宜没好货，好货不便宜”、“一分钱一分货”，这些其实都只是有一定的道理，在现实生活中，并不是没有相对便宜的好货，也不是没有价格偏高的质量一般的商品。那么，到底我们在购物时，特别是在选择数码类商品时，应该怎样做出最科学的购物决策呢？怎样做到物有所值，不被商家忽悠呢？

【问题】

例如，现在某人需要买一部新手机，想在国产手机和外国某品牌手机中做出选择。现在已知，在价格上，拿某种国产手机和来自外国的这个品牌的手机进行比较，发现前者的价格在 2000 元左右，后者的价格则高达 5000 元，比前者的两倍还要多；在性能上，我们根据某个专业的手机测评软件分别对它们进行“跑分”，也就是进行性能测试，最后得到国产手机的测评分数在 14 万分左右，而后者的测评分数则在 17 万分左右。那么，他是该选择国产手机还是外国品牌手机呢？

【解析】

首先，分析两种手机各自价格和性能之间的关系。

通常来说，对于同一种商品，价格和性能都是呈线性关系的。在了解

两种手机的价格和性能之后，上述问题可以通过运筹学中的线性规划方法来解决，其核心思想就是选择“性价比”更高的商品。我们常说的“性价比”，指的是性能与价格的比例。

其次，根据线性关系，画出相关图像。

有句话说得好，"一分钱一分货"，因此，对于手机的性能和价格之间的关系，我们不妨简化为一般的线性关系。根据这种线性关系，也就意味着，当手机的价格变为 0 时，它的性能也就为 0，并且手机的性能是随着手机价格的上升而上升的。因此，我们可以根据以上信息，画出它们之间的线性图像，如图 2-6 所示。其中，左边直线表示国产手机的性价比线，右边直线表示外国品牌手机的性价比线，并且国产手机价格和性能用 A 点表示，外国品牌手机用 B 点表示。

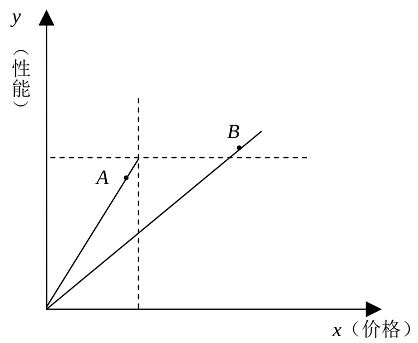

图 2-6　两种手机的性价比图像

再次，观察图像，描述相关信息。

通过图 2-6 可以看出，连接 A 点的直线可以表示国产手机的性价比，连接 B 点的直线表示外国品牌手机的性价比。其实我们也可以根据前面的数据得到各自的线性方程和准确的性价比系数，但是，仅仅分析图像就已经能够得到帮助我们进行决策的信息了。可以看出，国产手机的直线比外

国品牌手机的直线更陡，也就是上升速度更快，因此，不用计算就可以得出国产手机的性价比比外国品牌手机的性价比要高。从图 2-6 中的虚线也可以看出，在同样的性能下，国产手机的价格远低于外国品牌手机；在一定的价格内，国产手机的性能也高于外国品牌手机。

最后，得到最优的解决方案。

现在就可以知道了，在预算紧张的情况下，选择国产手机显然比选择外国品牌手机要更加合理。因为这样的选择既可以满足我们对手机性能的基本要求，又能帮助我们节省大量的价格空间，这笔省下来的开支可以去做其他事情。当然，每个人都有自己的选择，如果追求最高的手机性能，那么买外国品牌手机更能满足需要，当然，你得为那高出的一点性能付更多的钱，这里面其实包含了“品牌溢价”。

2.2.2　如何科学饮食

【背景】

很多人都想通过节食来达到减肥的目的，其实在减肥时科学饮食即可。科学饮食不是不吃，相反，是提倡多吃一些低热量的食品，少吃那些高热量的食品，同时不至于让节食给身体带来不良的影响。人每天所需的能量都是一定的，也就意味着所需的能量不能太多，也不能太少。

【问题】

根据中国营养学会的推荐，一个正常人每天需要摄入能量 2400kJ。因此，哪怕一个人在减肥，每天也必须吸收这么多的能量以保证自己的健康。由于不同的食物中包含的能量各不相同，那么，一个正常人应该怎样科学饮食，既不会造成肥胖，也不会影响正常的生活呢?

【解析】

首先，分析饮食和能量之间的关系。

无论你现在是不是正在减肥，也必须确保每天吸收的能量达到推荐标准；如果你正在减肥，那么摄入的能量最好不要超过这一标准。这时候，有蔬菜和肉类两种食品供你选择。我们都知道，相同质量的蔬菜，它的热量远低于肉类。显然，每种食品的食用量和剩余的能量需求之间是呈线性关系的。

其次，根据线性关系，画出相关图像。

显然，当一个人没吃任何食物时，还需要摄入 2400kJ 能量；所吃的食物达到一定的摄入量后，所需的能量就会变为 0，这时候不适合再吃任何食物。根据这些信息，便可以画出两种食品和剩余的能量需求之间的线性关系图像，如图 2-7 所示。其中，左边直线可以表示肉类食品的食用量和剩余所需能量之间的关系，右边直线可以表示蔬菜类的食用量和剩余所需能量之间的关系。

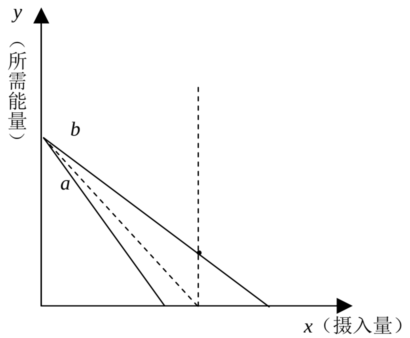

图 2-7　所需能量和摄入量之间的线性关系

再次，观察图像，描述相关信息。

从图 2-7 中可以看出，摄入量和所需能量之间是一种下降的关系，其中直线 a 代表肉类和所需能量之间的线性关系，直线 b 则代表蔬菜和所需能量之间的线性关系。显然，代表肉类的直线 a 下降的速度比蔬菜要快得多。我们都知道，我们每天都需要足够的食物来填补胃产生的饥饿感，假设每天需要摄入的食物量需要达到图中垂直的虚线才能消除饥饿感。因此，如果我们只吃肉类，那么很快就会达到每日的能量需求标准，这时候就不适合再吃任何食物了，而此时还没有消除饥饿感，很容易让人再摄入食物；而对于蔬菜，则需要吃足够多才能达到每日的能量需求标准，如果只吃蔬菜，则达到虚线的标准就已经消除了饥饿感，但是仍需要进一步摄入食物补充能量，否则对身体不利。

最后，得到最优的解决方案。

综合上面的分析，我们得到的最优的解决方案就是每天吃少量的肉类，吃足量的蔬菜，相互搭配，找到图 2-7 中那条 a 和 b 之间的虚线，让我们在消除饥饿感的同时刚好满足每天的能量需求，就不会造成能量剩余。

2.2.3　公司之间的竞争问题

【背景】

线性规划的思想也体现在其他各个学科中，如经济学、计算机科学等。在微观经济学中，有一个“比较优势”的概念，说的就是一家公司如何调节生产和市场之间的关系。其实，比较优势非常符合线性规划的思想，不仅适合公司，也适合单独的个人。很多时候，或许一个人各方面的竞争力都落后于别人，但是往往在某个方面仍然拥有比较优势。那么，到底什么是比较优势呢?

【问题】

假设现在有甲和乙两家公司，甲公司和乙公司都生产 A 和 B 两种商品，甲公司每天能够生产 4 件 A 商品，或者 8 件 B 商品；乙公司每天能够生产 2 件 A 商品，或者 6 件 B 商品。现在，甲公司应该如何安排生产呢？乙公司无论哪种产品，在产量上都不占优势，它又会是怎样的处境呢？

【解析】

首先，分析两种商品产量之间的关系。

我们可以根据上面的介绍列出表 2-2。

表 2-2　甲、乙两家公司生产能力表

	A 商品	B 商品
甲公司	4 件/天	8 件/天
乙公司	2 件/天	6 件/天

同时，我们可以看出，在资源有限的情况下，甲、乙这两家公司生产 A 商品和生产 B 商品之间都呈线性关系，即生产 A 商品增加一定量后，生产 B 商品就会减少。

其次，根据线性关系，画出相关图像。

根据两种商品之间的线性关系，甲公司生产 A 商品 4 件时就不能生产 B 商品了，反过来，生产 B 商品 8 件时就不能生产 A 商品了，因此，可以画出它们之间的线性关系图，如图 2-8 所示。

再次，观察图像，描述相关信息。

从图 2-8 中可以看出，甲公司完全占据上风，乙公司似乎无法在市场上立足。但市场是自由交换的，这时候奇迹出现了，双方为了追求最大利润，甲公司会选择将全部资源用来生产 A 商品，而乙公司则将全部资源用

来生产 B 商品。这是因为，从图 2-8 和表 2-2 中可以看出，对于甲公司来说，每生产 2 件 B 商品，将要少生产 1 件 A 商品；而对于乙公司来说，每生产 3 件 B 商品，才少生产 1 件 A 商品。两相比较之下，显然甲公司生产 B 商品的消耗要比乙公司多，这就是乙公司在 B 商品上的比较优势所在。

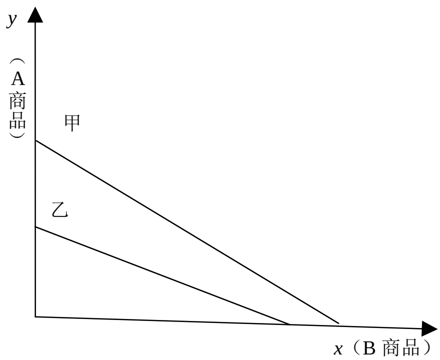

图 2-8　甲、乙两家公司生产商品的线性关系

最后，得到最优的解决方案。

从上面的分析中可以看出，甲公司只生产 A 商品，乙公司只生产 B 商品，就是线性规划后的最优解决方案。这个方案确保了甲公司的利益最大化，也给乙公司提供了生机。在市场自由的情况下，如果双方需要 A 商品和 B 商品，则完全可以在甲公司只生产 A 商品、乙公司只生产 B 商品的基础上进行自由交换，从而达到互惠互利的双赢局面。所以，市场贸易的双方是否能够获利，要通过比较优势来计算，而不能通过绝对优势来计算。

延伸总结：通过上面这几个身边的例子，你可能对线性规划有了初步的了解。总之，线性规划就是利用表格、图像来进行直观的分析，涉及数值的时候就需要列出准确的方程了，我们可以通过下面几个更复杂的线性规划问题来进一步熟悉。

2.2.4　如何安排生产

【背景】

在实际生产过程中，必然需要进行规划，以确保员工在工作时间内有事可做；确保生产设备每天都得到充分利用，不会有闲置；确保生产原料能够充分利用，转化为相应的产品。只要这样，公司才能确保最大利润，保持最高的运转效率。

【问题】

某工厂用同一种原料生产甲、乙两种产品。每生产一件甲产品使用 3 个原料，耗时 1 小时；每生产一件乙产品使用 4 个原料，耗时 2 小时。已知该厂每天从原料厂获得 20 个原料，按每天工作 8 小时计算，该厂应该如何安排生产，既能保证工作时间又能确保原料不浪费?

【解析】

第一种方式：用方程来描述线性问题。

上面这个线性规划问题需要准确的解决方案，因此需要用到方程的思想。显然，对于同一种产品，每天生产的产品数量和原料的消耗、产品数量和所用时间都是呈线性关系的，因此可以画出它们的线性关系图像。同时，利用方程的思想，假设安排生产 x 件甲产品、y 件乙产品，根据它们消耗的总原料必须小于 16，从而可以得到：$4x+4y=16$；同时，每天工作时间是 8 小时，要充分利用时间，从而可以得到：$x+2y=8$。综合可以得到下面的方程组：

$$\begin{cases} 3x+4y=20 \\ x+2y=8 \end{cases}$$

解上面这个方程组可以得到 x=4, y=2，因此可以得到每天应该安排生产甲产品 4 件，生产乙产品 2 件，只有这样才能充分利用原料，同时确保每天 8 小时的工作时间。

第二种方式：用图像来描述线性问题。

除了用方程来描述线性问题，我们也可以根据上面的方程画出图 2−9，根据图像，也能找到线性规划问题的最优解决方案。例如，在图 2−9 中，就可以确定两条直线的交点正是这个方程组的解。这也说明方程和图像之间的关系非常紧密，方程的解就是所表示的直线的交点。

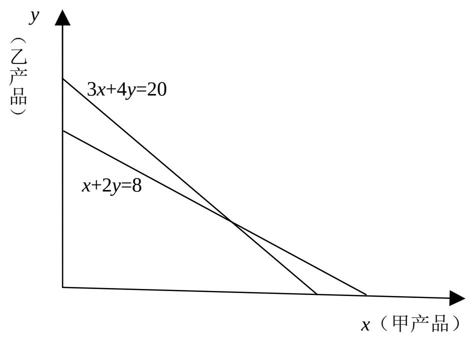

图 2−9　甲、乙产品生产图像

2.2.5　如何安排运输耗油量最少

【背景】

在物流系统中，往往需要不同类型的运输工具配合使用，共同完成某一项运输任务。但是，不同的运输工具各有利弊，有的工具运输量大，但是耗油量较多，有的运输量小，但是耗油量也少，或者有的工具运输速度快，但是运输成本高，有的工具运输速度慢，但是运输成本很低。为了完

成运输任务，同时又要尽可能地压缩运输成本，因此也需要用到线性规划。

【问题】

现有 170t 货物要从甲地运往乙地，大卡车的载重量是 5t，小卡车的载重量是 2t，大卡车与小卡车每车每次的耗油量分别是 10L 和 5L，如何选派车辆才能使运输耗油量最少？这时共需要油多少升？

【解析】

熟悉了上面的例子后，我们可以按照下面几个步骤来分析一些较复杂的线性规划问题。当然，这个问题较前一个更复杂。

第一步：分析线性关系。在这个例子中，对于一种类型的卡车，它的运输量和运输次数呈线性关系：运输量=运输次数×载重量；同样的，它的耗油量和运输次数也呈线性关系：总耗油量=运输次数×单次耗油量。

第二步：设未知数，确立要优化的目标。要安排两种类型的车辆参与运输，因此，假设安排大卡车 x 辆、小卡车 y 辆一起参与这次运输。所要优化的是运输的总耗油量，即 $10x + 5y$。这就是这个线性规划问题的目标。

第三步：列出不等式（方程）。在这个例子中，不像上个问题中要求那么严格，运输的时候可能会出现最后一次运输时卡车没有装满的情况，因此我们根据上述线性关系列出的只能是一个不等式：$5x+2y\geqslant 170$。这就是这个线性规划问题的条件，这样的条件在运筹学中又被称为约束条件。

第四步：考虑边界条件。边界条件其实就是一些客观上的要求，例如，这里的 x 和 y 都是指卡车的数目，因此它们不可能是负数，即 x，$y\geqslant 0$，这也是这个线性规划问题的条件，同时也是绝大部分日常生活中线性规划问题的条件。通常，这样的条件被称为边界条件。

第五步：画出图像。对于不等式，可以画出方程 $5x + 2y = 170$ 的图像，不等式就表示这条直线的上方区域，也就是阴影部分。对于要求的目标 $10x + 5y$，可以用一条虚线表示，如图 2–10 所示。

第六步：移线。我们要尽可能地求得最小的耗油量，因此虚线 $10x + 5y$ 应该尽可能往下，越往下，求得的值就越小。但是必须满足不等式的要求，因此虚线又不能离开阴影部分。根据这两点就可以得到，当虚线移到 A 点时，得到的 $10x + 5y$ 的值应该是最小的。这个 A 点正是 $5x + 2y = 170$ 与 x 轴的交点(34, 0)。

第七步：取最优结果。上面得到的最优点是 A 点(34, 0)，也就代表了这个线性规划问题的最优解是 $x = 34$，$y = 0$，这时候目标 $10x + 5y$ 可以取最小值，即 $10 \times 34 = 340$。因此，我们选择安排 34 辆大卡车运输这 170t 货物，这种方案可以使耗油量最低，此时耗油量是 340t。

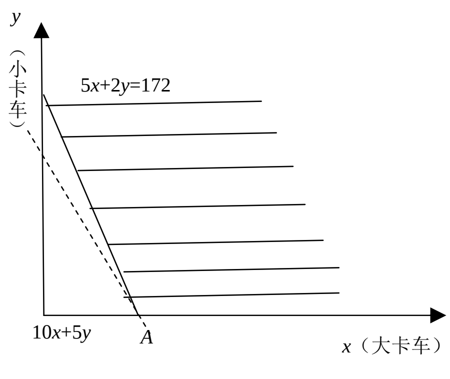

图 2–10　汽车运输的线性规划

第 3 章

整数规划：最优解必须是整数的规划问题

整数规划是一类特殊的线性规划问题，对于这类线性规划问题，求得的最优解必须是整数。在现实生活中，大多数线性规划问题都是整数规划，而解决整数规划问题的方法又与一般线性规划问题有所不同。

3.1　外行看懂整数规划

整数规划比一般的线性规划要复杂，但基本思想还是不变的，都是要求得问题的最优解决方案。学习整数规划对我们解决实际问题更有帮助。本节主要介绍解决整数规划问题的方法和整数规划中较简单的 0-1 规划问题。

3.1.1　将整数规划问题转化为一般线性规划问题

如果我们在解决某个线性规划问题时，要求所求得的最优解中所有数值都是整数，那么这必然是整数问题。例如，分配人力时是按照人数来规划的，安排机器生产时也是按照机器的台数进行规划的，还有运输过程中车辆的数目等，这些规划问题中求得的最优方案都必须是整数，不能是分数或者小数，否则就会闹出笑话。

但是，广泛地说，求得的最优解中只要求部分数值必须是整数的线性规划问题，也可以称之为整数问题。例如，在现实生活中，在规划购物清单时，我们要买的商品必须是整件的；还有，我们在评定成绩时部分科目只用是否通过来表示，这其实就是整数中的 0 和 1，没通过就相当于 0，通过则意味着 1。当然，现实生活中还有许多问题都可以用 0 和 1 这两个最简单的整数来表示。

到底如何得到整数规划问题的最优解呢?

最核心的思想就是将整数规划问题转化为线性规划问题，只要解决了线性规划问题，自然也就得到了整数规划问题的最优解。这也说明，整数规划问题和一般线性规划问题，两者之间有着密不可分的联系。由于一般线性规划问题不需要顾及求得的最优解是不是整数，因此它的解决办法比较简单明了，也不容易出错。而将整数规划问题转化为一般线性规划问题，这个转化过程正是化繁为简的过程，这是运筹学中对复杂规划问题的一般处理思路，后面章节中对许多规划类问题的处理都体现了这一基本思路。

我们来看一个物流领域的运输问题：

某公司准备用集装箱盛装甲和乙两种产品以便用船来运输。装运这两种产品的集装箱各不相同，现在已知装运甲产品的集装箱体积是 $9m^3$，装运乙产品的集装箱体积是 $7m^3$;一箱甲产品和一箱乙产品的重量也不相同，一箱甲产品的重量是 7t，一箱乙产品的重量是 20t；并且一箱甲产品和一箱乙产品能带来的利润也不相同，一箱甲产品可以带来 4000 元利润，一箱乙产品可以带来 9000 元利润。由于船上有一定的托运限制，对于甲产品和乙产品来说，运输总体积不能超过 $56m^3$，运输总重量不能超过 70t。现在，该选择怎样的运输方案，让总利润达到最大?

在上述问题中，甲产品和乙产品的运输都是以箱为单位的，每种产品所用的集装箱数量必须是整数，不存在半箱、四分之一箱这些说法，因此这是一个典型的整数规划类问题。根据上述问题的各项信息，可以得到表 3-1。

表 3-1　甲产品和乙产品的运输情况

产品	每箱体积（m^3）	每箱重量（t）	每箱利润（千元）
甲	9	7	4
乙	7	20	9
托运限制	56	70	

对于上述整数规划问题，也包含其他的整数规划问题，都可以按照下述步骤来进行处理。

第一步：运用方程的思想，将这个问题的目标和条件完整地描述出来。

在用方程描述一个规划问题时，又可以按照这四个主要步骤进行。首先，设未知数。在上述问题中，只有甲、乙两种产品需要运输，因此，只需设置两个未知数，假设这次运输共有 x 箱的甲产品和 y 箱的乙产品。其次，描述目标。由于已经设了未知数，那么，根据每箱产品的利润，就能够得到这个整数规划问题的目标：$4x+9y$，单位是千元。显然，这个目标越大越好。再次，写约束条件。根据船上的托运限制，可以得到这个整数规划问题的两个重要的约束条件：$9x+7y\leqslant 56$，$7x+20y\leqslant 70$，其中第一个条件是对产品总体积的限制，第二个条件是对产品总重量的限制。最后，根据实际要求，写出边界条件。在这个整数规划问题中，x 和 y 表示的是箱子的数量，因此，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$。同时，这个问题还有其他要求，那就是 x 和 y 都必须是整数。

总结起来，也就能够将这个整数问题描述成下面的方程和不等式。

目标：$4x+9y$，求最大值

条件：

$$9x+7y\leqslant 56$$

$$7x+20y\leqslant 70$$

$$x,\ y\geqslant 0$$

x, y 是整数

（这是一个整数规划问题）

第二步：将整数规划问题当作一般线性规划问题，再求最优解。既然

要当作一般的线性规划问题来考虑，在上述问题中，就可以将“x, y是整数”这个条件省略，从而得到一个普通的线性规划问题。

目标：$4x+9y$，求最大值

条件：$9x+7y\leqslant 56$

$7x+20y\leqslant 70$

$x, y\geqslant 0$

（这是一个线性规划问题）

对于上述这个线性规划问题，利用图形思想，将它的条件表示为图中固定的直线，即 $9x+7y=56$ 和 $7x+20y=70$，目标表示为图中可以移动的虚线，即 $4x+9y$，得到图 3-1。其中，阴影部分就是符合条件的解的范围，我们要从中寻找最优解。在求线性规划问题的最优解时，表示目标的虚线是可以移动的，如图 3-1 所示，当虚线移动到直线 $9x+7y=56$ 和直线 $7x+20y=70$ 的交点 A 时，就是目标 $4x+9y$ 达到最大的时候。

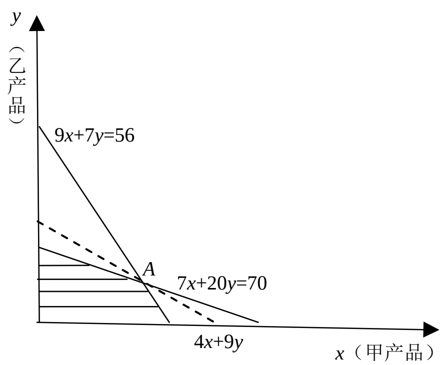

图 3-1　先求这个线性规划问题

我们通过两条直线的方程，可以求出 A 点的坐标不是两个整数，四舍五入后得到(4.81, 1.82)。同时，可以求得这时候的目标 $4x+9y$，同样四

舍五入后得到最大利润是 35.6，单位是千元。显然，这时候得到的解是小数，不能满足这个实际问题。

第三步：缩小 x 的选择范围。如果我们求得的最优解是小数，就可以根据小数的两端进一步缩小最优整数解的选择范围。从第二步可以得到，最优解是 $x = 4.81$，$y = 1.82$。虽然我们还不知道 x 和 y 分别取哪个整数时能够使目标 $4x + 9y$ 最大，但是我们可以排除 $4<x<5$ 这个范围，因为 $4<x<5$ 中 x 都是小数，不可能有整数。因此，得到的最优解中 x 的范围应该是 $x\geqslant5$ 或者 $x\leqslant4$。接着，便能够将 $x\leqslant4$ 和 $x\geqslant5$ 这两个条件分别加进第二步的线性规划问题中，从而得到下面两个线性规划问题。

加入条件 $x\leqslant4$，得到问题 1。

目标：$4x + 9y$，求最大值

条件：
$$9x + 7y\leqslant56$$
$$7x + 20y\leqslant70$$
$$0\leqslant x\leqslant4,\ y\geqslant0$$

加入条件 $x\geqslant5$，得到问题 2。

目标：$4x + 9y$，求最大值

条件：
$$9x + 7y\leqslant56$$
$$7x + 20y\leqslant70$$
$$x\geqslant5,\ y\geqslant0$$

对于上述两个线性规划问题，可以用图像和方程的方法来求出它们各自的最优解，如图 3-2 和图 3-3 所示。

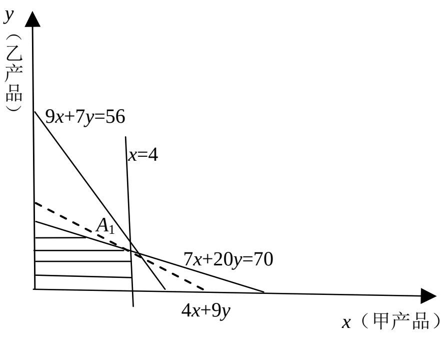

图 3-2　加入条件 $x \leqslant 4$

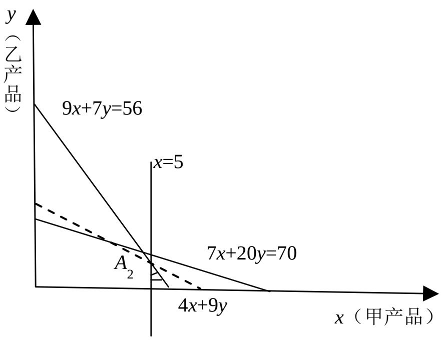

图 3-3　加入条件 $x \geqslant 5$

对于问题 1，就是在图 3-1 中加入直线 $x = 4$，取左边部分，这时所要求解的范围就是图 3-2 中的阴影部分。然后移动虚线 $4x + 9y$，当虚线移到点 A_1 时，目标取得最大值。这个 A_1 点就是直线 $7x + 20y = 70$ 和直线 $x = 4$ 的交点，即(4, 2.1)，即 $x = 4$, $y = 2.1$ 就是问题 1 的最优解，这时目标 $4x + 9y$ 的值是：$4 \times 4 + 9 \times 2.1 = 34.9$。

对于问题 2，就是在图 3-1 中加入直线 $x = 5$，取右边部分，这时所要求解的范围就是图 3-3 中的阴影部分。然后移动虚线 $4x + 9y$，当虚线移到点 A_2 时，目标取得最大值。这个 A_2 点就是直线 $9x + 7y = 56$ 和直线 $x = 5$ 的交点，即(5, 1.57)，即 $x = 5$, $y = 1.57$ 就是问题 2 的最优解，这时目标 $4x + 9y$ 的值是：$4 \times 5 + 9 \times 1.57 = 34.1$。

根据第三步的分析，可以得出表 3-2。

表 3-2　x 缩小范围之后得到的两个小问题

原问题
目标：$4x + 9y$，求最大值
条件：$9x + 7y \leqslant 56$
$7x + 20y \leqslant 70$
$x, y \geqslant 0$

续表

最优解：$x = 4.81, y = 1.82$ 目标最大值：$4x + 9y = 35.6$	
问题 1	问题 2
目标：$4x + 9y$，求最大值 条件：$9x + 7y \leqslant 56$ $7x + 20y \leqslant 70$ $x \leqslant 4, y \geqslant 0$	目标：$4x + 9y$，求最大值 条件：$9x + 7y \leqslant 56$ $7x + 20y \leqslant 70$ $x \geqslant 5, y \geqslant 0$
最优解：$x = 4, y = 2.1$ 目标最大值：$4x + 9y = 34.9$	最优解：$x = 5, y = 1.57$ 目标最大值：$4x + 9y = 34.1$

第四步：进一步缩小 y 的选择范围。在第三步中，第二步中的线性规划问题被分为问题 1 和问题 2 两个问题，我们求得问题 1 的最优解是 $x = 4$, $y = 2.1$，问题 2 的最优解是 $x = 5$, $y = 1.57$，显然，这时 y 还不是整数，我们根据 y 两端的整数进一步缩小 y 的选择范围。接下来，将问题 1 和问题 2 进一步分解成两个小问题，共得到 4 个问题，只要求出这 4 个问题中的最优整数解即可。

在问题 1 中，y 取整数不可能在 $2<y<3$ 中，因为在 $2<y<3$ 中 y 只能取小数。因此，y 的范围应该是 $y \leqslant 2$ 或者 $y \geqslant 3$，分别将 $y \leqslant 2$ 和 $y \geqslant 3$ 当作条件加入问题 1 中，从而得到问题 1−1 和问题 1−2，如表 3−3 所示。对于问题 1−1，同样可以利用图像和方程的方法，求得最优解是 $x = 4$, $y = 2$，并且 x, y 都是整数，得到目标最大值是：$4x + 9y = 34$；对于问题 1−2，同样可以利用图像和方程的方法，求得最优解是 $x = 1.42$, $y = 3$，其中 x 不是整数，得到目标最大值是：$4x + 9y = 32.7$。比较这两个最优解，问题 1−1 的最优解已经是整数解，就不需要再压缩范围了；并且问题 1−1 得到的目标值比问题 1−2 要大，因此，对于问题 1−2，也不需要再压缩 x 的范围了，因为问题 1−2 的整数最优解得到的目标值一定是小于 32.7 的。总之，问题 1−2 已经不需要考虑了。

表 3-3　问题 1 中 y 缩小范围之后得到的两个小问题

<table>
<tr><td colspan="2">问题 1
目标：$4x+9y$，求最大值
条件：$9x+7y\leqslant56$
$7x+20y\leqslant70$
$x\leqslant4,\ y\geqslant0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">最优解：$x=4,\ y=2.1$
目标最大值：$4x+9y=34.9$</td></tr>
<tr><td>问题 1-1</td><td>问题 1-2</td></tr>
<tr><td>目标：$4x+9y$，求最大值
条件：$9x+7y\leqslant56$
$7x+20y\leqslant70$
$x\leqslant4,\ y\leqslant2$</td><td>目标：$4x+9y$，求最大值
条件：$9x+7y\leqslant56$
$7x+20y\leqslant70$
$x\leqslant4,\ y\geqslant3$</td></tr>
<tr><td>最优解：$x=4,\ y=2$
目标最大值：$4x+9y=34$
（都是整数，且目标值最大）</td><td>最优解：$x=1.42,\ y=3$
目标最大值：$4x+9y=32.7$
（比 34 要小，不需要考虑）</td></tr>
</table>

在问题 1 中，y 取整数不可能在 $1<y<2$ 中，因为在 $1<y<2$ 中 y 只能取小数。因此，y 的范围应该是 $y\leqslant1$ 或者 $y\geqslant2$，分别将 $y\leqslant1$ 和 $y\geqslant2$ 当作条件加入问题 2 中，从而得到问题 2-1 和问题 2-2，如表 3-4 所示。对于问题 2-1，同样可以利用图像和方程的方法，求得最优解是 $x=5.44$，$y=1$，得到目标最大值是：$4x+9y=30.8$，由于目标的值比问题 1-1 得到的 34 要小，因此，问题 2-1 也不需要考虑了。对于问题 2-2，同样可以利用图像和方程的方法，发现这个问题没有解。

表 3-4　问题 2 中 y 缩小范围之后得到的两个小问题

问题 2 目标：$4x+9y$，求最大值 条件：$9x+7y\leqslant56$ $7x+20y\leqslant70$ $x\geqslant5,\ y\geqslant0$

续表

<table>
<tr><td colspan="2">最优解：$x=5$, $y=1.57$
目标最大值：$4x+9y=34.1$</td></tr>
<tr><td>问题 2-1</td><td>问题 2-2</td></tr>
<tr><td>目标：$4x+9y$，求最大值
条件：$9x+7y\leqslant 56$
$7x+20y\leqslant 70$
$x\geqslant 5$, $y\leqslant 1$</td><td>目标：$4x+9y$，求最大值
条件：$9x+7y\leqslant 56$
$7x+20y\leqslant 70$
$x\geqslant 5$, $y\geqslant 2$</td></tr>
<tr><td>最优解：$x=5.44$, $y=1$
目标最大值：$4x+9y=30.8$
（比 34 要小，不需要考虑）</td><td>无解</td></tr>
</table>

综合上述分析，得到这个整数规划问题的最优整数解就是问题 1-1 的最优解，即 $x=4$, $y=2$，此时目标最大值是 34。

对于上述整数规划问题的求解思路，还可以用图 3-4 来表示。

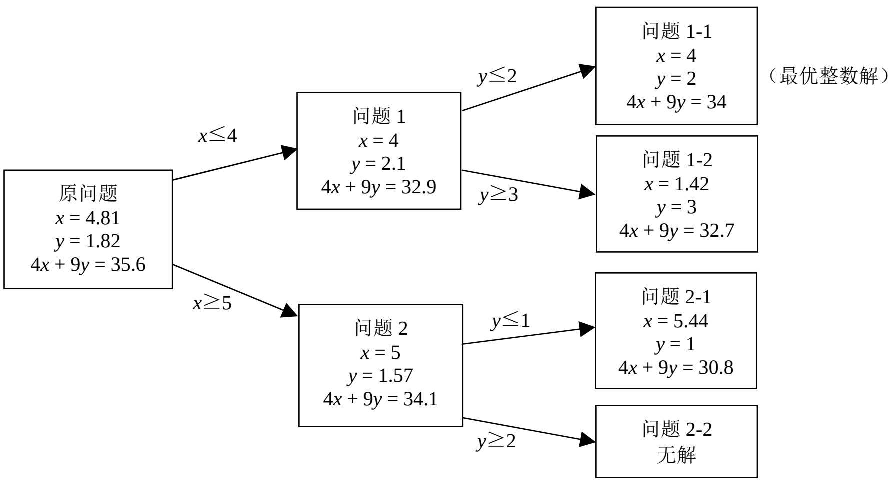

图 3-4　整数规划问题的解决步骤

从上述过程来看，整数规划问题转化为线性规划问题是需要经过多个阶段的。具体说来：首先，将整数规划问题当作一般的线性规划问题，求

得其最优解；其次，如果求得的最优解都是整数，那么，原问题就已经得到最优整数解，否则就要看 x 和 y 当中哪个不是整数，再根据其两端的整数压缩范围，将原来的问题变为两个线性规划问题；最后，求这两个线性规划问题的整数解，选择最优的那个。如果出现小数，则同样要压缩范围。

3.1.2 特殊的整数规划：0−1 规划

0 和 1 可以说是现代社会中最重要的两个数字，我们的计算机就是通过对 0 和 1 表示的二进制数的处理来为我们提供各种各样服务的。在解决一些规划问题时，也需要用 0 和 1 分别表示某件事物的有无，这些规划问题就是 0−1 规划。由于 0 和 1 都是整数，这些规划问题也就变成了整数规划问题。

0−1 规划就是规划问题中的“选择题”。在 0−1 规划问题中，往往有许多选项，每个选项带来的收益都不同，你可以根据规定的条件选择其中一项或者几项，确保自己的收益最大。因此，我们可以用数学方式来进行描述。

假设一共有 n 件事物可以选择，并且第 i 件事物带来的收益是 c_i，其中，$i=1, 2, 3 \cdots, n$。对于第 i 件事物的选择，可以用 x_i 来表示，当 $x_i=1$ 时，表示选择这件事物；当 $x_i=0$ 时，表示不选这件事物，其中，$i=1, 2, 3 \cdots, n$。现在要求收益最大的选择方案。根据这些信息，可以将目标和某些条件用数学式子表示出来。

目标，可以表示为：$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$；

必须做第 i 件事，可以表示为：$x_i=1$；

不能做第 i 件事，可以表示为：$x_i=0$；

只能选择 k 件事物，可以表示为：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$；

至多选择 k 件事物，可以表示为：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant k$；

最少选择 k 件事物，可以表示为：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant k$；

第 i 件事物和第 j 件事物互相矛盾，可以表示为：$x_i + x_j = 1$；

第 i 件事物是第 j 件事物的充要条件，可以表示为：$x_i = x_j$；

做第 j 件事物之前必须做第 i 件事物，可以表示为：$x_j \leqslant x_i$。

将上述结论应用到实际问题中，这些抽象的式子便可以用来表示现实中的某个条件，从而有了具体的实际含义。下面，我们就从分店选址这个实际问题来进一步了解 0-1 规划问题。

某个餐饮品牌计划今年在 A、B、C 和 D 这四座城市中选择两座城市开分店，这四座城市的开店成本和每年的利润分别是：在 A 地开店需要投资 a_1 万元，每年带来的利润是 b_1 万元；在 B 地开店需要投资 a_2 万元，每年带来的利润是 b_2 万元；在 C 地开店需要投资 a_3 万元，每年带来的利润是 b_3 万元；在 D 地开店需要投资 a_4 万元，每年带来的利润是 b_4 万元。在这次计划中，每座城市最多开一家分店，并且不能在 A 和 D 这两座城市都开分店，同时总的投资成本不能超过 a 万元。请问，制订怎样的开店计划能够使利润最大呢?

在上述问题中，假设用 x_1 表示是否在 A 地开分店，用 x_2 表示是否在 B 地开分店，用 x_3 表示是否在 C 地开分店，用 x_4 表示是否在 D 地开分店，其中 x_1、x_2、x_3 和 x_4 都只能取 0 或者 1，再结合问题中的信息，便得到表 3-5。

表 3-5　四地开分店的投资与利润表

地点	投资成本（万元）	每年利润（万元）	是否开分店
A	a_1	b_1	x_1
B	a_2	b_2	x_2
C	a_3	b_3	x_3
D	a_4	b_4	x_4

根据表 3-5，每年带来的总利润可以表示为：$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4$；需要的总成本不能超过 a 万元，可以表示为：$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4\leqslant a$；由于只能开两家分店，可以表示为：$x_1+x_2+x_3+x_4=2$；并且不能在 A 地和 D 地都开分店，可以表示为：$x_3+x_4\leqslant 2$。总结起来，可以得到下面的 0-1 规划问题。

目标：$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4$，求最大值

条件：

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4\leqslant a$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$

$$x_3+x_4\leqslant 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4=0\text{ 或 }1$$

上述问题是现实生活中一个典型的 0-1 规划问题，从这个问题中可以发现 0-1 规划问题的一些显著特点：首先，最显著的特点就是所有未知数都是 0 或者 1 这两个整数，不能是小数，也不能是其他整数；其次，在大多数 0-1 规划问题中，未知数的个数都比较多，不再是简单的两个未知数，这和我们之前接触的一般线性规划问题和一般整数规划问题有所不同。

3.1.3　枚举法解决 0–1 规划问题

在了解了 0–1 规划问题之后，0–1 规划问题的具体解决办法不能按照一般线性规划问题来处理，因为最优解必须是 0 或者 1 这两个整数；此外，也不能按照一般整数规划问题来处理，因为最优解只含 0 和 1 这两个整数，而未知数往往很多。虽然在 0–1 规划问题中未知数很多，但是每个未知数都只有两种选择，因此可以用枚举的方法，考虑 0–1 规划问题中每种可能的情形，然后不断排除，直到找出最优解。但是，枚举的时候也是有技巧可寻的，不能是单纯的枚举。

接下来，我们就从这个典型的 0–1 规划问题出发。

目标：$5x_1 + 3x_2 - 2x_3$，求最大值

条件：
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 2 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 4 \quad (2)$$
$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1$$

先用一般的枚举法来求它的最优解，即先求出可行的解，然后在可行解中寻找目标值最大的那个解，也就找到了这个 0–1 规划问题的最优解。分析上述 0–1 规划问题，这个问题共有三个未知数，分别是 x_1、x_2 和 x_3，每个未知数只有两种选择，不是 0，就是 1。因此，这个问题共有 8 种需要考虑的情形。

对于这 8 种情形，我们可以一一列举出来，如表 3–6 所示，通过计算，判断是否符合条件（1）和条件（2），一旦发现不符合某个条件，就说明这种情形是不可行的，如表 3–6 中的(0, 1, 1)，这时就不需要后续的计算了，直接考虑下一种情形。如果都符合条件（1）和条件（2），就说明这种情形是可行的，接着计算对应的目标值，即 $5x_1 + 3x_2 - 2x_3$ 的值。将所

有情形都经过计算和判断之后，我们从可行的情形中挑选出目标值最大的那个方案，也就是表 3-6 中的(1, 1, 0)，说明 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ 就是这个 0-1 规划问题的最优解。

表 3-6　一般枚举法：先判断是否满足条件，再求目标值

(x_1, x_2, x_3)	条件（1）	条件（2）	目标值	备注
0, 0, 0	0	0	0	可行
0, 0, 1	2	4	−2	可行
0, 1, 0	1	1	3	可行
0, 1, 1	3			不可行
1, 0, 0	−1	1	5	可行
1, 0, 1	1	5		不可行
1, 1, 0	0	2	8	可行
1, 1, 1	2	6		不可行

总结起来，在表 3-6 中，第二列和第三列的计算结果的个数是 20，这也就说明，使用一般的枚举方法，在求这个 0-1 规划问题时共需要 20 次计算。

接下来，我们将上述方法做进一步改进。我们发现，当我们求得某个满足条件的可行解，并且计算出它的目标值之后，这个目标值也可以成为一个判断的依据。具体来说，在表 3-6 中，我们求得第一个可行解是 $x_1 = 0$, $x_2 = 0, x_3 = 0$，这时的目标值是 0，也就意味着这个 0-1 规划问题的最优解的目标值一定是大于或者等于 0 的，即 $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant 0$，如果求得的目标值不满足这个条件，那么这种情形一定不会是最优解，也就不需要再去判断其他条件了。像这样通过目标值构造出来的条件，我们称之为过滤条件。

以此类推，如果遇到更大的目标值，如 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$，此时目标值是 3，那么，这个 0-1 规划问题的最优解的目标值一定是大于或者等

于 3 的，即 $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant 3$，过滤条件也就应该换成这个条件。同样的，接下来便优先判断是否满足这个过滤条件，如果不满足，就不需要进一步判断是否满足其他条件了。

在枚举时，将某个可行解的目标值作为判断的过滤条件，优先判断当前情形的目标值是否满足这一条件，如果满足，则进一步判断是否满足其他条件。依照这种方法，得到的计算过程如表 3-7 所示。从表 3-7 中可以看出，这个 0-1 规划问题的最优解一定是最后一个可行解，也就是(1, 1, 0)，即 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$，此时的目标值是 8，达到最大。

表 3-7　先判断目标值是否满足条件，不满足就直接计算下一种情形

(x_1, x_2, x_3)	目标值	过滤条件	条件（1）	条件（2）	备注
0, 0, 0	0	-	0	0	可行
0, 0, 1	−2	0			非最优
0, 1, 0	3	0	1	1	可行
0, 1, 1	1	3			非最优
1, 0, 0	5	3	−1	1	可行
1, 0, 1	3	5			非最优
1, 1, 0	8	5	0	2	可行
1, 1, 1	6	8			非最优

总结起来，在表 3-7 中，需要计算的只有目标值、条件（1）和条件（2），而过滤条件是通过比较目标值来判断，因而不需要计算。因此，统计第二列、第四列和第五列的计算结果的个数是 16，这也就说明，使用带有过滤条件的枚举方法，在求这个 0-1 规划问题时共需要 16 次计算，这比一般枚举方法的计算次数要少。

最后，针对上述带有过滤条件的枚举方法，我们仍然可以做进一步改进。既然我们通过前面的目标值来作为判断当前这种情形是否最优的依据，就应该尽可能早地发现最优解，这将减少我们判断是否满足其他条件

的次数。那么，怎样才能尽可能早地发现最优解呢？这时候，需要对目标 $5x_1+3x_2-2x_3$ 中的各项按照未知数的系数从小到大进行排序，得到 $-2x_3+3x_2+5x_1$，再依次考虑(x_3, x_2, x_1)的情形，这样就能确保尽可能早地发现 0−1 规划问题的最优解。这时候得到的计算过程如表 3−8 所示。

表 3−8　经过排序后，再采用带过滤条件的枚举方法

(x_3, x_2, x_1)	目标值	过滤条件	条件（1）	条件（2）	备注
0, 0, 0	0	−	0	0	可行
0, 0, 1	5	0	−1	1	可行
0, 1, 0	3	5			非最优
0, 1, 1	8	5	0	2	可行
1, 0, 0	−2	8			非最优
1, 0, 1	3	8			非最优
1, 1, 0	1	8			非最优
1, 1, 1	6	8			非最优

从表 3−8 中可以看出，当(x_3, x_2, x_1)是(0，1，1)时，得到的目标值是最大的，并且这时满足所有条件，从而得到这个 0−1 规划问题的最优解是 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=0$。在表 3−8 中，同样统计第二列、第四列和第五列的计算结果的个数是 14，也就是说，先排序，再采用带过滤条件的枚举方法，能够让计算次数进一步减少，只需要计算 14 次，就能确定这个 0−1 规划问题的最优解。

总结起来，解决 0−1 规划问题的基本思路是枚举方法，但是如何高效地排除那些不可能的情形，这是一个值得不断思考的问题。因此，经过不断的改进，得到了一个比较高效的解决 0−1 规划问题的方法：首先，将目标中的各项根据系数的大小从小到大进行排序，得到需要考虑的情形；其次，按照顺序一一进行计算，判断是否满足所有条件，如果可行，那么它的目标值就可以成为最开始的过滤条件，之后的情形就需要先判断是否满

足过滤条件，如果是，就要不断更新这个过滤条件；以此类推，直到所有情形都计算过为止，得到的最后一个可行解就是 0-1 规划问题的最优解。

3.2　生活中的整数规划

3.2.1　工厂如何安排生产销售额最大

【问题】

某工厂可以生产产品 A 和产品 B 两种产品。这两种产品在市场上是畅销产品，生产一件产品 A 需要使用机器 6 小时，使用人工 10 小时，售价是 800 元；生产一件产品 B 需要使用机器 8 小时，使用人工 5 小时，售价是 500 元。该工厂的机器时间总量是 120 小时，人工时间总量是 100 小时。该工厂经理要制订怎样的生产计划，使工厂的销售额能够达到最大?

【解析】

在上述规划问题中，生产产品 A 的件数和产品 B 的件数都必须是整数，因此，这个问题是整数规划问题。不妨假设生产产品 A 的数量是 x 件，生产产品 B 的数量是 y 件，其中 x 和 y 是不小于 0 的整数。再根据题干信息，也就得到表 3-9。

表 3-9　产品 A 和产品 B 的生产情况表

	机器（时）	人工（时）	产品售价（百元）	产品数量（件）
产品 A	6	10	8	x
产品 B	8	5	5	y
资源总量	120	100		

第一步：将问题用方程描述出来。由表 3-9 可知，由产品 A 和产品 B 各自的售价可以得到产品的总售价是 $8x+5y$，单位是百元，这就是该规划问题的目标，需要求这个目标的最大值。根据工厂中的机器时间总量是 120 小时，得到条件：$6x+8y\leqslant 120$；同样，根据工厂中的人工时间总量是 100 小时，得到条件：$10x+5y\leqslant 100$。最后，再考虑 x 和 y 都必须是整数，并且都不能小于 0。总结起来，也就得到下面的整数规划问题。

目标：$8x+5y$，求最大值

条件：

$$6x+8y\leqslant 120$$

$$10x+5y\leqslant 100$$

$$x, y\geqslant 0$$

x, y 都是整数

第二步：当作一般的线性规划问题求出最优解。忽略上述问题中 x, y 都是整数这个条件，将条件 $6x+8y\leqslant 120$ 和 $10x+5y\leqslant 100$ 表示为图 3-5 中的实线，将目标 $8x+5y$ 表示为图 3-5 中的虚线，图中阴影部分就是我们寻找最优解的范围。移动表示目标的虚线，可以发现，当移动到两条直线的交点 A 时，目标的值能够达到最大，也就是说 A 点表示的解就是这个线性规划问题的最优解。由 $10x+5y=100$ 和 $6x+8y=120$ 可以得到 A 点的坐标是(4，12)，也就得到这个线性规划问题的最优解是 $x=4$，$y=12$，此时的目标值能达到最大，最大是 $8x+5y=92$，单位是百元。

第三步：考察最优解是否为整数。上述线性规划问题的最优解是 $x=4$，$y=12$，两个数都是整数，因此，不需要再压缩 x 或者 y 的范围，这个最优解就是原来整数规划问题的最优解。也就得到，该工厂应该安排生产 4 件 A 产品、12 件 B 产品，这样才能让产品的总销售额达到最大，最大销售额是 9200 元。

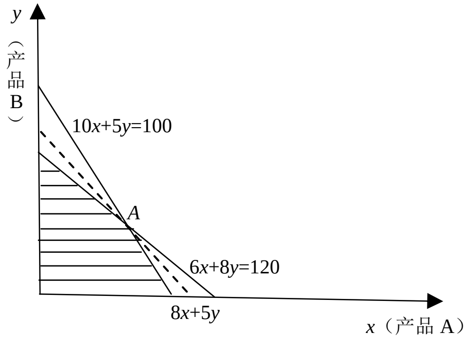

图 3-5　寻找线性规划问题的最优解

3.2.2　如何安排运输获利最大

【问题】

某公司的产品分为甲型号和乙型号，这两种产品都非常畅销，其中甲型号有 120 件，乙型号有 80 件，现在准备将这些产品调往 A 地和 B 地进行销售，通过市场调研发现，A 地市场对这种产品的总需求是 130 件，B 地市场对这种产品的总需求是 100 件。其中，一件甲型号的产品在 A 地卖出后能够带来 2600 元利润，在 B 地卖出后能够带来 3000 元利润；一件乙型号的产品在 A 地卖出后能够带来 2100 元利润，在 B 地卖出后能够带来 2500 元利润。该公司应该安排怎样的运输计划，能够让产品销售带来的利润达到最大?

【解析】

首先，分析题中信息，设未知数。

在上述问题中，在产品运输过程中，产品的件数必须是整数，因而这是一个整数规划问题。由于该产品有甲和乙两种型号，并且运输的目的地有 A 和 B 两个地区，不妨假设运输 x_1 件甲型号的产品到 A 地，运输 x_2 件

甲型号的产品到 B 地，运输 y_1 件甲型号的产品到 B 地，运输 y_2 件乙型号的产品到 B 地，其中，x_1、x_2、y_1 和 y_2 是不小于 0 的整数。再结合题干信息，也就得到表 3–10。

表 3–10 产品运输情况表

产品型号	运输目的地	每件利润（百元）	运输数量（件）
甲型号	A 地	26	x_1
	B 地	30	x_2
乙型号	A 地	21	y_1
	B 地	25	y_2

其次，列出问题中的目标和条件。

根据表 3–10，可以得到产品销售带来的利润是：$26x_1 + 30x_2 + 21y_1 + 25y_2$，单位是百元，这就是该整数规划问题的目标，这个目标值越大越好。由于产品的数量是有限的，甲型号的产品有 120 件，显然，运输甲型号产品的数量不能超过它的总量，也就得到条件：$x_1 + x_2 \leqslant 120$；同样的，乙型号的产品有 80 件，也就得到条件：$y_1 + y_2 \leqslant 80$。接着，在每个市场上，产品的总销量不能超过总需求，由于 A 地的总需求是 130 件，也就得到条件：$x_1 + y_1 \leqslant 130$；同样的，由于 B 地的总需求是 100 件，也就得到条件：$x_2 + y_2 \leqslant 100$。总结得到，这个整数规划问题如下。

目标：$26x_1 + 30x_2 + 21y_1 + 25y_2$，求最大值

条件：

$$x_1 + x_2 \leqslant 120$$

$$y_1 + y_2 \leqslant 80$$

$$x_1 + y_1 \leqslant 130$$

$$x_2 + y_2 \leqslant 100$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2\text{是整数}$$

前面我们解决的整数规划问题都只有两个未知数，因而可以利用图像和方程来求解。但是上述整数规划问题中包含四个未知数，求最优解的过程非常复杂，因此，在解决这类整数规划问题时，可以借助专业的软件来求最优解，如 MATLAB 和 LINGO。

3.2.3　简单的背包问题

【背景】

在现实生活中，对于物流分配、资金分配、空间分配、时间分配等一系列资源分配问题，我们都需要进行权衡和规划，找到最优的解决方案。例如，将一些物品装进一只大箱子，每件物品的体积不一样，我们该如何充分利用有限的空间呢？在一家公司中，在掌握资源有限的情形下，公司能够有许多不同的业务，各自的利润和所需的资源也不同，应该如何将有限的资源安排给足够多的业务，确保能够收获最大利润？这些问题都离不开下面的“背包问题”。

【问题】

背包问题：现在有三件物品和一只容量为 10 千克的背包，这三件物品的重量依次是 3 千克、4 千克和 5 千克，它们的价值分别是 4 元、5 元和 6 元。每件物品只有一个，请问将哪些物品装入背包可使这些物品的重量总和不超过背包容量，并且能得到最大的总价值？

【解析】

首先，分析问题，假设未知数。

从题干中可以看出，这是规划问题中的“选择题”，对于每一件物品，只能选择放进背包或者不放进背包，如果放进背包则用 1 表示，不放进背包则用 0 表示，那么，这个问题就成了典型的 0–1 规划问题。假设第一件物品是否放入背包用 x_1 表示，第二件物品是否放入背包用 x_2 表示，第三件物品是否放入背包用 x_3 表示，其中，x_1、x_2 和 x_3 是 0 或者 1。根据题干信息，就可以得到表 3–11。

表 3–11　各种物品的重量和价值表

物品	重量（千克）	价值（元）	是否放入背包
第一件	3	4	x_1
第二件	4	5	x_2
第三件	5	6	x_3

其次，描述问题中的目标和条件。

由表 3–11 可以求出背包中物品的总价值是：$4x_1 + 5x_2 + 6x_3$，单位是元。这就是该 0–1 规划问题的目标，目标的值越大越好。另外，再根据背包的重量不能超过 10 千克，也就得到了条件：$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leqslant 10$。因此，可以得到下面的 0–1 规划问题。

目标：$4x_1 + 5x_2 + 6x_3$，求最大值

条件：$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 10 \qquad (1)$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ 是 0 或者 1}$$

再次，将目标排序，进行枚举，判断过滤条件。

从上面的分析中可以发现，这个 0–1 规划问题比较简单，只有一个不等式条件，并且目标中的各项系数已经按照从小到大的顺序排序。因此，我们只需依次计算每种可能的情形即可。首先，考虑 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$，

这时的目标值是 0，也就得到过滤条件：$4x_1+5x_2+6x_3 \geqslant 0$。接下来，先判断是否满足这个过滤条件，再依次进行计算即可，可以得到表 3–12。

表 3–12　枚举法解决背包问题

(x_1, x_2, x_3)	目标值	过滤条件	条件（1）	备注
0, 0, 0	0	–	0	可行解
0, 0, 1	6	0	5	可行解
0, 1, 0	5	6		非最优
0, 1, 1	11	6	9	可行解
1, 0, 0	4	11		非最优
1, 0, 1	10	11		非最优
1, 1, 0	9	11		非最优
1, 1, 1	15	11	12	不可行

最后，从枚举的表格中找到最优解。

从表 3–12 中可以得到，当(x_1, x_2, x_3)是(0, 1, 1)时，目标值最大，也就得到这个 0–1 规划问题的最优解是 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$，这时的目标值是 11。因此，应该往背包中放进第二件物品和第三件物品，才能使得背包的价值达到最大，最大价值是 11。

3.2.4　怎样的投资组合获利最大

【背景】

在现实社会中，无论是公司还是个人，投资是每个人都无法回避的问题，我们需要让已有的资金保持增值，获得尽可能多的收益。但是，投资的方式多种多样，关于投资的金融产品也层出不穷，选择怎样的投资方式，如何搭配不同的投资金融产品，才能让有限的资金达到最好的增值效果，从中获得最大的收益呢？其实，这个问题就可以简化为一个 0–1 规划问

题，通过解决 0-1 规划问题，就能得到最优的理财方案，让资金的收益达到最大。

【问题】

某公司准备对三个项目进行投资，根据公司现有的资金情况，这四年的总投资额分别是 5 万元、7 万元、7 万元、6 万元，这三个项目每年所需投资额以及项目结束后得到的利润如表 3-13 所示。请问，这家公司应该采用怎样的投资策略才能获得最大的利润?

表 3-13　三个项目在四年内的投资与收益表

投资年度	项目 1	项目 2	项目 3	总投资额（万元）
第一年	0	4	2	5
第二年	5	1	2	7
第三年	4	0	3	7
第四年	5	1	3	6
纯利润（万元）	20	8	16	

【解析】

首先，分析问题，假设未知数。

在上述问题中，对于每个项目只有两种选择：投资或者不投资。因此，投资可以用 1 来表示，不投资可以用 0 来表示，这个问题就是一个典型的 0-1 规划问题。不妨假设是否投资项目 1 用 x_1 表示，是否投资项目 2 用 x_2 表示，是否投资项目 3 用 x_3 表示，其中，x_1、x_2 和 x_3 是 0 或者 1。

其次，列出该问题的目标和条件。

结合表 3-13，得到最后的总利润是 $20x_1 + 8x_2 + 16x_3$，单位是万元，这是该 0-1 规划问题的目标，目标值越大越好。另外，在这次投资中，每年的投资额不能超过当年的总投资额，即第一年的投资额不能超过 5 万元，

也就得到条件（1）：$4x_2+2x_3 \leqslant 5$；第二年的投资额不能超过 7 万元，也就得到条件（2）：$5x_1+x_2+2x_3 \leqslant 7$；第三年的投资额不能超过 7 万元，也就得到条件（3）：$4x_1+3x_3 \leqslant 7$；第四年的投资额不能超过 6 万元，也就得到条件（4）：$5x_1+x_2+3x_3 \leqslant 6$。总结起来，就可以将这个 0−1 规划问题描述如下。

目标：$20x_1+8x_2+16x_3$，求最大值

条件：

$$4x_2+2x_3 \leqslant 5 \quad (1)$$

$$5x_1+x_2+2x_3 \leqslant 7 \quad (2)$$

$$4x_1+3x_3 \leqslant 7 \quad (3)$$

$$5x_1+x_2+3x_3 \leqslant 6 \quad (4)$$

x_1, x_2, x_3 是 0 或者 1

从描述中可以发现，这个 0−1 规划问题条件比较多，计算起来就更加烦琐。其实，这时候，我们可以将这些条件进行比较，从而将某些多余的条件删去，达到化简问题的目的。

其次，删去问题中不必要的条件。

细心的读者可能已经发现了条件（2）和条件（4）非常相似，条件（4）左边比条件（2）要多一个 x_3，因此，条件（4）的左边一定不会小于条件（2）的左边，即 $5x_1+x_2+2x_3 \leqslant 5x_1+x_2+3x_3$。这也就说明，只要满足条件（4），即 $5x_1+x_2+3x_3 \leqslant 6$，那么一定会有 $5x_1+x_2+2x_3 \leqslant 6$，也就是说条件（2）一定会被满足。总之，如果条件（4）满足，那么条件（2）一定满足，我们只需判断条件（4）即可，对于条件（2）就不需要再考虑了。

另外，在条件（3）中，由于 x_1 和 x_3 的值不是 0 就是 1，因此 $4x_1 + 3x_3$ 一定是小于或者等于 7 的，也就是说这个条件是不需要判断就成立的。因此，在枚举的时候，条件（3）也可以不用考虑。

经过上述简化过程，得到 0−1 规划问题如下。

目标：$20x_1 + 8x_2 + 16x_3$，求最大值

条件：

$$4x_2 + 2x_3 \leqslant 5 \qquad (1)$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 6 \qquad (4)$$

x_1, x_2, x_3 是 0 或者 1

最后，用枚举法解决简化后的 0−1 规划问题。

对于这个简化后的 0−1 规划问题，首先，将目标中的各项按照系数从小到大的顺序进行排序，得到 $8x_2 + 16x_3 + 20x_1$，因此，我们应该依次考虑(x_2, x_3, x_1)的各种情形。当 $x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 = 0$ 时，目标值是 0，也就得到第一个过滤条件是：$20x_1 + 8x_2 + 16x_3 \geqslant 0$。依次类推，逐一进行计算和排除，得到表 3−14。

表 3−14　枚举法计算过程

(x_2, x_3, x_1)	目标值	过滤条件	条件（1）	条件（4）	备注
0, 0, 0	0	−	0	0	可行解
0, 0, 1	20	0	0	5	可行解
0, 1, 0	16	20			非最优
0, 1, 1	36	20	2	8	不可行
1, 0, 0	8	20			非最优
1, 0, 1	28	20	4	6	可行解
1, 1, 0	24	28			非最优
1, 1, 1	44	28	6		不可行

从表 3-14 中可以看出，当(x_2, x_3, x_1)是(1, 0, 1)的目标值最大，这时的目标值是 28，也就是说这个 0-1 规划问题的最优解是 $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_1 = 1$。最终得出这家公司投资项目 1 和项目 2 能够获得最大利润，最大利润是 28 万元。

3.2.5　怎样合理地新建工厂和仓库

【问题】

假设某公司计划新建 1 家或者 2 家工厂，地点选择在 A 地和 B 地。此外，该公司还计划在 A 地或者 B 地新建 1 个仓库，为了节省运输费用，仓库只能建在有工厂的地方，若该地没有建工厂，则不需要建仓库。经调查发现，在 A 地新建工厂的投资成本为 600 万元，获得的收益为 300 万元；在 A 地新建仓库的投资成本为 500 万元，获得的收益为 200 万元；在 B 地新建工厂的投资成本为 300 万元，获得的收益为 200 万元；在 B 地新建仓库的投资成本为 400 万元，获得的收益为 100 万元。已知公司的总投入是 1300 万元，应该如何确定新工厂和新仓库的位置，使收益达到最大?

【解析】

首先，分析问题，假设未知数。

在上述问题中，无论是新建工厂还是新建仓库，都需要在 A 地和 B 地之间进行选择。对于 A 地或者 B 地，可以用 1 来表示选择，用 0 来表示不选择，因此，这是一个 0-1 规划问题。不妨假设，是否在 A 地新建工厂用 x_1 来表示，是否在 A 地新建仓库用 x_2 来表示，是否在 B 地新建工厂用 x_3 来表示，是否在 B 地新建仓库用 x_4 来表示，其中，x_1、x_2、x_3 和 x_4 是 0 或者 1。再根据题干信息，可以得到表 3-15。

表 3-15　新建工厂和仓库的成本与收益表

地点	项目	投资成本（百万元）	收益（百万元）	是否建设
A 地	工厂	6	3	x_1
	仓库	5	2	x_2
B 地	工厂	3	2	x_3
	仓库	4	1	x_4

其次，列出该问题的目标和条件。

从表 3-15 中可以看出，这次新建计划的总收益是 $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$，单位是百万元，这也是该 0-1 规划问题的目标，目标值越大越好。另外，根据总投入是 1300 万元，也就得到新建工厂和仓库的总投资不能超过 1300 万元，得到条件（1）：$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 13$；根据新建工厂的数量不能超过 2 家，可以得到条件（2）：$x_1 + x_3 \leqslant 2$；根据新建仓库的数量只能是 1 个，可以得到条件（3）：$x_2 + x_4 = 1$。其中，条件（2）是必然成立的，可以不用考虑。总结起来，这个 0-1 规划问题只需要考虑两个条件，可以描述如下。

目标：$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$，求最大值

条件：
$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 13 \quad (1)$$
$$x_2 + x_4 = 1 \quad (3)$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 是 0 或 1}$$

再次，分情况讨论，简化问题。

上述这个 0-1 规划问题的条件只有 1 个，但是未知数较多，共有 4 个，这时候就需要考虑 16 种情形。为了减少枚举计算的复杂度，不妨分情况考虑，先假设 $x_1 = 1$。当 $x_1 = 1$ 时，条件（1）就变为 $6 + 5x_2 + 3x_3 +$

$4x_4 \leqslant 13$，即 $5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 7$，目标就变为 $3 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$，原来的 0-1 规划问题就变为如下形式，只含有 x_2、x_3 和 x_4 这 3 个未知数。

目标：$3 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$，求最大值

条件：　$5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 7$　（1）

$x_2 + x_4 = 1$　（3）

x_2, x_3, x_4 是 0 或 1

（假设 $x_1 = 1$）

再采用枚举的方法解决这个比较简单的 0-1 规划问题，就得到它的最优解是 $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$，此时目标值是 6，这是假设 $x_1 = 1$ 时的最优解。

接着，我们假设 $x_1 = 0$，这时条件（1）就变为 $5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 13$，目标就变为 $2x_2 + 2x_3 + x_4$，原来的 0-1 规划问题就变为如下形式，同样只含有 x_2、x_3 和 x_4 这 3 个未知数。

目标：$2x_2 + 2x_3 + x_4$，求最大值

条件：　$5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 13$　（1）

$x_2 + x_4 = 1$　（3）

x_2, x_3, x_4 是 0 或 1

（假设 $x_1 = 0$）

再采用枚举的方法解决这个比较简单的 0-1 规划问题，就得到它的最优解是 $x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$，此时目标值是 4，这是假设 $x_1 = 0$ 时的最优解。

最后，比较两种情形的最优解，得到最终的最优解。

通过比较这两种情形下的最优解，就可以得到原来 0–1 规划问题的最优解是 $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$，这时候的目标值是 6，达到最大。也就是说，新建工厂和仓库的最佳计划是在 A 地和 B 地都建工厂，在 B 地建仓库，这时候得到的总收益是 600 万元。

第 4 章

动态规划：将复杂问题分解的思维

生活中有许多问题，我们在规划得到最优解决方案的过程中，问题本身非常复杂，这时候往往需要将大问题转化成一个个小问题，从小问题处着手，解决一个个小问题，从而得到最终的最优解决方案。这就是动态规划，它比线性规划要复杂。

4.1 外行看懂动态规划

“天下难事，必作于易；天下大事，必作于细。”这是老子的名言，这句话就揭示了动态规划解决复杂问题的核心思想。学会了动态规划，往往一头雾水、摸不着头脑的复杂问题就有了清晰的解决思路，最后得到最优的解决方案。

4.1.1 从找零钱说起

我们在购物时，往往收银员需要找零钱给顾客，但顾客不喜欢将过多的纸币装在口袋里。因此，收银员需要尽可能地采取纸币张数最小的找零方案，以便顾客的体验更好。假设你在一家超市做收银员，现在有 1 角、2 角、5 角、1 元、2 元和 5 元这 6 种面值的纸币，你需要找给你的顾客 1 元 3 角纸币。

根据我们的一般思维，找零钱还不简单吗？要找 1 元 3 角零钱，尽量给顾客面值最大的纸币不就行了吗？因此，你需要给顾客 1 张 1 元纸币、1 张 2 角纸币和 1 张 1 角纸币，因此，至少需要找给顾客 3 张纸币，这就是最优的解决方案。

上述这个一般思维只是凭借我们的经验和直觉，先尽可能地找给顾客面值最大的纸币，剩下的部分再用面值小的纸币找给顾客。这只是纸币的

面值这样设置刚好适合我们这种最直观、最方便的做法。为什么这么说呢？接下来你就会明白了。

现在，我们假设纸币的面值发生了变化，和现实中的面值不同，超市里面找零用的纸币一共有 1 角、3 角、4 角、5 角、1 元、3 元、4 元、5 元，现在你的几位顾客分别需要 7 角、1 元 7 角、2 元 7 角、3 元 7 角、7 元。这时候，你该如何给这些顾客找零，确保顾客满意呢？

按照我们的直觉，这似乎是一件很简单的事情。同样，先找给顾客面值尽可能大的纸币。对于 7 角钱的找零，我们先找给顾客 1 张 5 角的纸币，剩下 2 角钱，因此只能再找给顾客 2 张 1 角的纸币，从而得到“最优”的解决方案是 3 张。类似的，对于 1 元 7 角，就需要 4 张（1 张 1 元，1 张 5 角，2 张 1 角）；对于 7 元，就需要 3 张（1 张 5 元，2 张 1 元）等。这些真的是最优解决方案吗？

细心的读者可能已经发现，对于 7 角钱的找零方案，最优的方案只需要 2 张纸币即可，即 1 张 3 角和 1 张 4 角。类似的，1 元 7 角只需要 3 张纸币（1 张 1 元，1 张 3 角，1 张 4 角），7 元仅仅需要 2 张纸币（1 张 3 元，1 张 4 元）等。这些方案都比上面那些所谓的“最优”方案进一步优化，这些才是最终的最优。显然，在这样的面值设置下，我们的直觉和经验就失灵了，依靠直觉和经验不能给顾客最优的找零方案，达到让顾客满意的效果。

上述过程正体现了仅仅依靠“先尽可能找面值最大的”这种直观的思维是解决不了一些复杂问题的，这时候就需要进行动态规划了。通过动态规划，我们能够得到真正的最优方案，而它往往不再是直观上的“最优”。因此，学会动态规划是十分必要的，能够让我们用理性思考问题，不被感性和经验所欺骗。

那么，到底如何利用动态规划解决刚才的找零问题呢？

4.1.2　动态规划需要细分思维

在上述找零问题的一般解法中，有一个很不严谨的思维错误，那就是认为最优的方案一定是包含最大面值的纸币在内的，而这只是一种直观思维。因为先用面值最大的纸币找零，只能说明剩下的要找的零钱更少，并不能说明一定最优。

动态规划，首先要全面地考虑问题。

在寻找最优的找零方案时，必须寻找包含各种面值纸币的方案，如包含 5 角纸币的方案、包含 4 角纸币的方案、包含 3 角纸币的方案、包含 1 角纸币的方案等。然后从这些方案中选择一个最优方案，这一定是整个找零问题的最优解。

动态规划，其次要对问题进行细分。

我们知道，只有从所有不同的情形中才能选出最优，这时候，按照我们的惯性思维，使用简单枚举的方法把每种组合都列出来，再进行比较，不就得到最优的找零方案了吗？在这个简单的找零问题中，可能枚举比较简单，但在后面的一些例题中，就可以说明通过简单的枚举选出最优方案是很费力的。

动态规划不是简单枚举，而是将问题细分成一个一个的小问题，前后环环相扣。就如同上楼梯一样，你若想登上最高的那一阶，必须从最低的一阶开始，逐次往上。因此，对于 7 角钱的找零问题，就可以细分为找 1 张 2 角纸币和另外一个如何找 2 角零钱的小问题，或者细分为找 1 张 4 角纸币和另外一个如何找 3 角零钱的小问题，或者细分为找 1 张 3 角纸币和另外一个如何找 4 角零钱的小问题，或者细分为找 1 张 1 角纸币和另外一个如何找 6 角零钱的小问题（见图 4-1）。

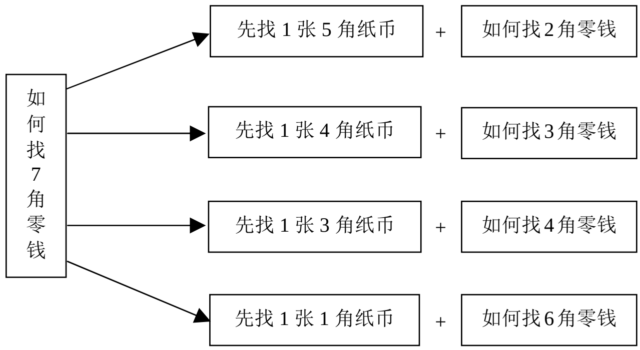

图 4-1　找零问题的细分

这时候，你就会发现，对于如何找 7 角零钱的复杂问题，就会变成 4 个小问题：如何找 2 角零钱；如何找 3 角零钱；如何找 4 角零钱；如何找 6 角零钱。我们选择这 4 个小问题中的最优方案，另外只要再加上 1 张纸币，就能构成原来问题的最优方案。因为在这些小问题中，无论是哪个找零方案所用的纸币最少，都还要再加上 1 张纸币，或者是 1 角，或者是 3 角等，只有这样才能凑够 7 角零钱。总之，整个问题的最优方案就建立在小问题的最优方案的基础之上。

动态规划，最后要从最小的问题着手。

更进一步，我们可以发现，对于上述 4 个小问题，还可以再次进行细分。由于有面值为 1 角的纸币，4 个小问题又可以细化为更小的问题（见图 4-2）。

（1）如何找 2 角零钱可以转化为先给出 1 张 1 角纸币，再如何找 1 角零钱的小问题，并且这个问题再也无法细分。因此，找 2 角零钱只有一种做法，就是 2 张 1 角纸币，这也是最优的方案（2 张）。

（2）如何找 3 角零钱可以转化为先给出 1 张 1 角纸币，再如何找 2 角零钱的小问题，或者直接给出 1 张 3 角纸币。对于前者，我们由（1）

已经知道找 2 角零钱的最优方案是 2 张 1 角纸币，因此，前者共需要 3 张 1 角纸币，而后者只需要 1 张 3 角纸币。显然，1 张 3 角纸币就是找 3 角零钱的最优方案（1 张）。

（3）如何找 4 角零钱可以转化为先给出 1 张 1 角纸币，再如何找 3 角零钱的小问题，或者直接给出 1 张 4 角纸币。对于前者，我们由（2）已经知道找 3 角零钱的最优方案是 1 张 3 角纸币，因此，前者一共需要 1 张 1 角和 1 张 3 角纸币，而后者只需要 1 张 4 角纸币。显然，1 张 4 角纸币是找 4 角零钱的最优方案（1 张）。

（4）如何找 6 角零钱可以转化为先给出 1 张 5 角纸币，再如何找 1 角零钱，显然，在这种情形下只有一种解决方案，即 1 张 5 角和 1 张 1 角纸币；还可以转化为先给出 1 张 4 角纸币，再如何找 2 角零钱，由（1）可以得到，在这种情形下最优方案为 1 张 4 角和 2 张 1 角纸币；还可以转化为先给出 1 张 3 角纸币，再如何找 3 角零钱，由（2）可以得到，在这种情形下最优方案为 2 张 3 角纸币；还可以转化为先找 1 张 1 角纸币，再如何找 5 角零钱。

而对于如何找 5 角零钱，这时候又可以细分为先给出 1 张 1 角纸币，再如何找 4 角零钱，由（3）得到，在这种情形下最优方案为 1 张 1 角和 1 张 4 角纸币；或者先给出 1 张 3 角纸币，再如何找 2 角零钱，由（1）可得，在这种情形下最优方案为 1 张 3 角和 2 张 1 角纸币；或者先给出 1 张 4 角纸币，再如何找 1 角零钱，在这种情形下最优方案为 1 张 4 角和 1 张 1 角纸币；或者直接给出 1 张 5 角纸币。因此，找 5 角零钱的最优方案就是 1 张 5 角纸币。综合可得，找 6 角零钱的最优方案是 1 张 5 角和 1 张 1 角纸币（2 张）。

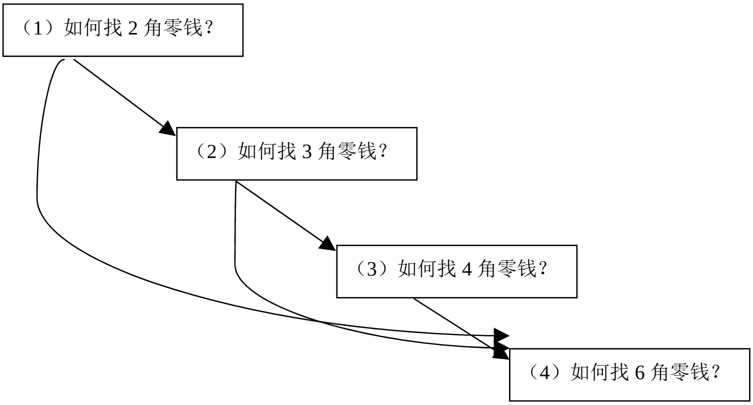

图 4-2　后面的问题可以依据前面问题的结论

综合（1)、(2)、(3）和（4）便可以得到，找 7 角零钱的最优方案应该是：先给 1 张 4 角纸币，由（2）得到，再给 1 张 3 角纸币；或者先给 1 张 3 角纸币，由（3）得到，再给 1 张 4 角纸币。可以发现，这两个都是同一种方案，即 1 张 3 角和 1 张 4 角纸币，这就是找 7 角零钱的最优方案。

4.1.3　动态规划的思维过程

通过上述找零钱的例子，你可能对动态思维有了一些了解。现在进一步总结动态思维过程中的几个关键环节和需要的注意事项。

首先，动态规划需要全面地分析问题。

不要仅仅依靠直觉和所谓经验就否定一些可能出现最优方案的情形。例如，在找 7 角零钱时，按直观思维是先用面值尽可能大的纸币，这样反而不是最优的。很多时候，逻辑往往是反直觉和经验的，或者说，我们的直觉和经验其实都有不严谨的地方。

因此，可以简单地将所有可能的解决方案都列举出来，不要漏掉任何

一种可能，除非你能从逻辑上否定它不是最优的。例如，在上述找零钱的例子中，在探讨如何找 3 角零钱时，可以断定最优方案就是 1 张 3 角纸币，不用将问题细分。因为当细分成更小的问题时，其解决方案就至少需要 2 张纸币了。

其次，动态规划需要对问题一步一步细分。

在进行动态规划时，只将问题进行一次细分，得到的小问题往往还比较复杂。这时候，就需要像上述例子一样，再进行细分。如果你仍觉得复杂，则可以继续细分下去，直到出现一些基本的小问题为止。例如，上述例子就能够细分到如何找 1 角零钱的基本问题。

最后，动态规划需要从最小的问题着手。

从上述例子中可以看到一种很巧妙的现象：我们在细分得到（1）、（2）、（3）和（4）这 4 个小问题之后，先解决最小的问题（1），然后依次解决（2）、（3）和（4）。你会发现在解决问题（2）的时候用到了问题（1）的结论，在解决问题（3）的时候用到了问题（2）的结论，在解决问题（4）的时候用到了前面几个小问题的结论。

这就是动态规划的巧妙之处，我们从解决最小的问题开始，一步一步，就能很轻松地解决稍复杂的小问题，最后也就解决了原来的复杂问题，得到了最优的方案。也可以这么说，动态规划是一个连续决策的过程，需要从最基础的问题开始，找到每一步的最优方案，也就得到了最终的最优方案。

总之，动态规划中最核心的是问题的细分，如何细分问题往往决定了解决问题的难易程度，细分不当，甚至会得不到最优的方案。至于如何细分问题，可以从接下来的几个例子中好好体味。

4.2　生活中的动态规划

4.2.1　用动态规划来考虑背包问题

【背景】

在前面的整数规划章节里，我们已经讲过了简单的背包问题，那是当作 0-1 规划问题，用枚举的方法来求得最优的选择方案。并且已经知道，背包问题在现实生活中的应用非常广泛，在遇到某些资源分配问题时，都可以将其看作背包问题。接下来就用动态规划的方法来解决背包问题。

【问题】

现在有 3 件物品和一只容量为 10 千克的背包，这 3 件物品的重量依次是 3 千克、4 千克和 5 千克，它们的价值分别是 4 元、5 元和 6 元。每件物品只有一个，请问将哪些物品装入背包可使这些物品的重量总和不超过背包容量，并且能得到最大的总价值?

【解析】

上述问题是著名的“背包问题”，这只是我们日常生活中可能遇到的又一个基本的动态规划问题。按照动态规划的思维过程：

首先，全面地考虑问题。

物品的总重量不能超过背包所能承受的重量，显然，在这个问题中，背包并不能将 3 件物品全部装入，必须有所取舍。这时候千万要注意，不能按照惯性思维，最优的方案一定是包含了“每千克价格”最高的物品，因为有可能其他情形是最优的。

其次，将问题进行细分。

我们都知道，对于任何一种方案，它总是包含重 5 千克的物体或者重 4 千克的物体或者重 3 千克的物体（见图 4-3）。因此，要找到最优方案，无非就是选出这 3 个小问题中的最优。

（1）先装入重 5 千克的物品，再如何装入不超过 5 千克的物品，使得背包总价值最大?

（2）先装入重 4 千克的物品，再如何装入不超过 6 千克的物品，使得背包总价值最大?

（3）先装入重 3 千克的物品，再如何装入不超过 7 千克的物品，使得背包总价值最大?

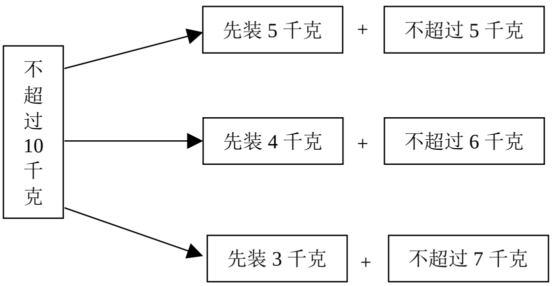

图 4-3　背包问题的细分

最后，从最小的问题着手。

对于细分得到的问题（1），此时背包中已经放入重 5 千克的物品，背包的价值已经是 6 元了。继续考虑如何装入不超过 5 千克的物品，使得它们的总价值最大。再进行细分，就可以发现，要装入不超过 5 千克的物品，此时重 5 千克的物品已经在背包里，因此只能有装入重量为 3 千克和 4 千克的物品这两种可能，因此，装入的最优方案是装入重 4 千克的物品，价值为 5 元。从而得到，在这种情形下原来问题的最优方案是：装入重 5 千克的物体和重 4 千克的物体，背包总价值为 11 元。

对于细分得到的问题（2），此时背包中已经装入重 4 千克的物品，背包的价值已经是 5 元了。继续考虑如何装入不超过 6 千克的物品，使得它们的总价值最大。再进行细分，就可以发现，要装入不超过 6 千克的物品，此时重 4 千克的物品已经在背包里，因此只能有装入重量为 3 千克和 5 千克的物品这两种可能，因此，装入的最优方案是装入重 5 千克的物品，价值为 6 元。从而得到，在这种情形下原来问题的最优方案是：装入重 4 千克的物体和重 5 千克的物体，背包总价值为 11 元。

对于细分得到的问题（3），此时背包中已经装入重 3 千克的物品，背包的价值已经是 4 元了。继续考虑如何装入不超过 7 千克的物品，使得它们的总价值最大。再进行细分，就可以发现，要装入不超过 7 千克的物品，此时重 3 千克的物品已经在背包里，因此只能有装入重量为 4 千克和 5 千克的物品这两种可能，因此，装入的最优方案是装入重 5 千克的物品，价值为 6 元。从而得到，在这种情形下原来问题的最优方案是：装入重 3 千克的物体和重 5 千克的物体，背包总价值为 10 元。

综合上面这 3 种情形便可以得到，最优的方案是装入重 5 千克的物体和重 4 千克的物体，此时，背包总价值为 11 元。

4.2.2　木头最多能卖多少钱

【问题】

现在有一根长 6 米的木头，现在将木头进行简单的切割加工，然后按表 4-1 所示的价格表出售。请问，如何切割能保证最后售卖得到的收入最多?

表 4-1　木头长度和价格表

长度（米）	1	2	3	5
价格（元）	1	5	8	10

【解析】

首先，全面分析问题。

在这个问题中，问的是如何将一根 6 米长的木头切割成不同长的段，然后按不同的价格进行出售，得到最多的收入。因此，任何一种长度都可能包含在最优的切割方案之中。

其次，将问题进行细分。

根据上面的分析，对于最优的切割方案，无非就是从以下几个问题中进行选择（见图 4-4）。

（1）先切割一段长度为 5 米的木头，再如何切割剩下的 1 米，使得出售得到的收入最多?

（2）先切割一段长度为 3 米的木头，再如何切割剩下的 3 米，使得出售得到的收入最多?

（3）先切割一段长度为 2 米的木头，再如何切割剩下的 4 米，使得出售得到的收入最多?

（4）先切割一段长度为 1 米的木头，再如何切割剩下的 5 米，使得出售得到的收入最多?

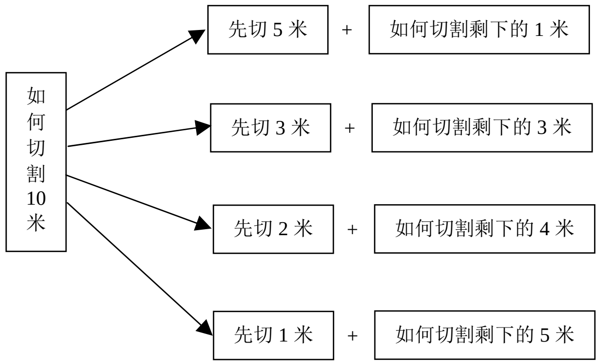

图 4-4　切割木头的细分问题

最后，从最小的问题着手。

在上述 4 个问题中，最小的问题应该是（1），只需考虑如何切割剩下的 1 米，使得出售得到的收入最多。显然，剩下的 1 米不用切割。在情形（1）下，只有一种分割方案，即一段 5 米、一段 1 米，出售得到的总收入是 11 元。

对于问题（2），剩下的 3 米共有 3 种切割方案：一种是不用切割，直接出售，收入是 8 元；一种是先切割一段 2 米，则剩下的一段 1 米无须切割，一起出售得到的收入是 6 元；另一种是先切割一段 1 米，再考虑如何切割剩下的 2 米。对于长为 2 米的木头，不切割的收入是 5 元，切割成两段 1 米的收入是 2 元，因此还是不切割好。综合这 3 种方案，对于 3 米长的木头，不切割时，出售得到的收入最多。因此，在情形（2）下，最优的切割方案是两段 3 米，出售得到的总收入是 16 元。

对于问题（3），剩下的 4 米共有 3 种切割方案：一种是切割一段 3 米，剩下 1 米不能再切割，收入是 9 元；一种是切割一段 2 米，剩下 2 米，由（2）可以得到，应该选择不切割，因此，收入是 10 元；另一种是切割一段 1 米，剩下 3 米，由（2）可以得到，还是不切割最好，总收入是 9 元。

综合这 3 种方案，对于 4 米长的木头，切割成两段 2 米，出售得到的收入最多。因此，在情形（3）下，最优的切割方案是三段 2 米，出售得到的总收入是 15 元。

对于问题（4），剩下的 5 米共有 4 种切割方案：一种是不切割，直接出售，得到的收入是 10 元；一种是先切割一段 3 米，剩下 2 米，由（2）可以得到，应该选择不切割，因此，收入是 13 元；一种是先切割一段 2 米，剩下 3 米，由（2）可以得到，不应该切割，因此，收入是 13 元；另一种是先切割一段 1 米，剩下 4 米，由（3）可以得到，应该切割成两段 2 米，因此，收入是 11 元。综合这 4 种方案，对于 5 米长的木头，切割成一段 2 米和一段 3 米，出售得到的收入最多。因此，在情形（4）下，最优的切割方案是一段 1 米、一段 2 米和一段 3 米，出售得到的总收入是 14 元。

综合上面（1）、（2）、（3）和（4）这 4 种情形，可以得到最优方案是在情形（2）下，即将 6 米长的木头切割成两段 3 米，此时出售得到的总收入是 16 元。

4.2.3 高效计算斐波那契数列

【背景】

数学史上鼎鼎大名的“斐波那契数列”，指的就是一个前两项相加得到第 3 项的数列。例如，1+1=2，1+2=3，2+3=5 ……斐波那契数列在许多方面都有应用，如物理、生物、交通规划等。著名的黄金分割就是依据斐波那契数列得来的，被广泛应用于艺术和工业设计领域。另外，在自然界中，树木的生长等自然规律中也体现出斐波那契数列。

【问题】

现在，我们需要计算斐波那契数列中各项的值。如果仅仅已知斐波那契数列的第 1 项和第 2 项都是 1，那么我们如何来求斐波那契数列中第 6 项的值呢？用动态规划的思想求解和用一般的方法求解有什么区别呢？

【解析】

第一种方法：按照一般的思路来求某项的值。

现在我们求第 6 项的值，按照一般的思路，只要分别求出斐波那契数列第 4 项和第 5 项的值，就能知道第 6 项的值了。首先，计算第 4 项的值。根据前两项都是 1，开始进行计算，第一次计算得到第 3 项是 2，第二次计算得到第 4 项是 3，共需要 2 次计算。其次，计算第 5 项的值。根据前两项都是 1，开始进行计算，第一次计算得到第 3 项是 2，第二次计算得到第 4 项是 3，第三次计算得到第 5 项是 5，共需要 3 次计算。最后，再通过 1 次计算，得到第 6 项的值是 3+5=8，整个过程共需要 6 次计算（2+3+1=6）（见图 4-5）。

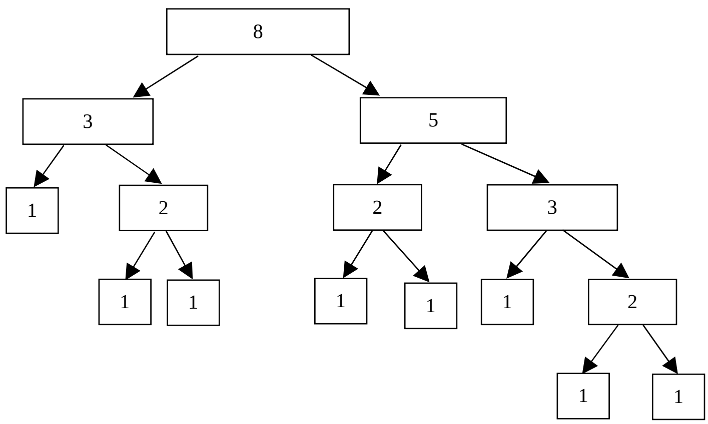

图 4-5　将 3 和 5 分开计算

在上面的计算思路中，包含了大量的重复性工作，其中，计算第 3 项和第 4 项的值就重复了 2 次。这是不必要的。

第二种方法：用动态规划来求某项的值。

在动态规划中，我们不需要将第 3 项和第 4 项的值分开来计算。根据动态规划的思想，可以将问题不断细分。

要求第 6 项的值，需要求第 4 项和第 5 项的值。要求第 5 项的值，需要知道第 3 项和第 4 项的值。此时，要求第 6 项的值，只要知道第 3 项和第 4 项的值即可。进一步细分得到：求第 4 项的值需要知道第 3 项的值和第 2 项的值（已知），而求第 3 项的值只要知道第 1 项的值（已知）和第 2 项的值（已知），只需 1 次计算即可。因此，我们先进行第一次计算得到第 3 项的值为 2，第二次计算得到第 4 项的值为 3，第三次计算得到第 5 项的值为 5，第四次计算得到第 6 项的值为 8，共只需 4 次计算即可（见图 4-6）。

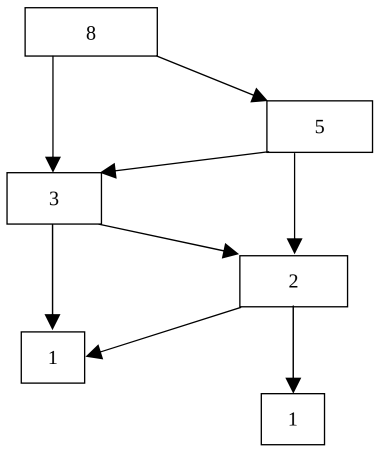

图 4-6　运用动态规划，每项只计算一次

比较上面两种计算斐波那契数列的方法，可以发现动态规划帮助我们

提高了计算效率，节省了一些重复性的工作。这也体现了动态规划需要全面、深入地思考问题，不断细分，直到找到最基本的小问题，再从小问题着手，一步一步向上解决。

4.2.4　引进外包人员的成本

【问题】

甲公司需要 11 名来自其他公司的外包人员，现在有 A 公司和 B 公司向甲公司提供自己的可选方案,其中 A 公司提供的可选方案是 2 万元/每 3 人，乙公司提供的可选方案是 3 万元/每 5 人。应该如何安排，既满足公司的需要，又要使成本最低?

【解析】

对于这种求最小成本的规划问题，也可以考虑用动态规划的思想来分析。

首先，全面分析问题。

这个问题需要注意的是，在 A 公司和 B 公司提供的方案中分别是以 3 人和 5 人为单位的，并未提供单独一名外包人员的方案。因此，如果甲公司只需要一名外包人员，并且选择 A 公司或者 B 公司的方案，那么它仍需要按照 3 人或者 5 人的价格付费。

其次，将问题进行细分。

对于甲公司来说，只有 A 公司和 B 公司提供的方案可以选择，因此，它所想要的最佳方案必定是包含了 A 公司的 3 人，或者包含了 B 公司的 5 人。因此，原来的问题可以细分成如下两个问题（见图 4−7）。

（1）甲公司首先选择 A 公司的 3 人，继续寻找满足 8 人需求的最佳方案。此时，甲公司已经付出的成本是 2 万元。

（2）甲公司首先选择 B 公司的 5 人，继续寻找满足 6 人需求的最佳方案。此时，甲公司已经付出的成本是 3 万元。

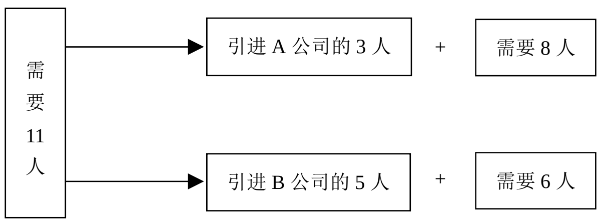

图 4-7　引进外包人员的细分问题

最后，从最基本的问题着手。

上述细分得到的小问题仍然比较复杂，因此需要继续进行细分。

对于（1）中如何寻求满足 8 人需求的最佳方案，又可以进一步细分为：

（1-1）选择 A 公司的 3 人，再寻求满足 5 人需求的最佳方案。此时，甲公司已经付 2 万元。对于如何满足 5 人需求，既可以直接从 B 公司引进 5 人，需花费 3 万元，又可以从 A 公司引进 6 人，需花费 4 万元。显然，直接从 B 公司引进 5 人成本更低。

（1-2）选择 B 公司的 5 人，再寻求满足 3 人需求的最佳方案。此时，甲公司已经付出的成本是 3 万元。为满足 3 人需求，或者从 A 公司引进 3 人，花费 2 万元，或者从 B 公司引进 5 人，花费 3 万元。显然，直接从 A 公司引进 3 人成本更低。

综合（1-1）和（1-2）可以得到，满足 8 人需求的最佳方案是引进

A 公司 3 人，B 公司 5 人，最终成本是 5 万元。从而得到在情形（1）下，最优方案是引进 A 公司 6 人，B 公司 5 人，成本是 7 万元。

对于（2）中如何寻求满足 6 人需求的最佳方案，又可以进一步细分为：

（2–1）选择 A 公司的 3 人，再寻求满足 3 人需求的最佳方案。此时，甲公司已经付 2 万元。为满足 3 人需求，由（1–2）可以得到，直接从 A 公司引进 3 人即可，花费 2 万元，这是最佳选择。

（2–2）选择 B 公司的 5 人，再寻求满足 1 人需求的最佳方案。此时，甲公司已经付出的成本是 3 万元。为满足 1 人需求，从 A 公司引进 3 人，花费 2 万元，或者从 B 公司引进 5 人，花费 3 万元。显然，为了满足 1 人需求，从 A 公司引进 3 人是最佳选择。

综合（2–1）和（2–2）可以得到，满足 6 人需求的最佳方案是全部从 A 公司引进，最终成本是 4 万元。从而得到在情形（2）下，最优方案是引进 A 公司 6 人，B 公司 5 人，成本是 7 万元。

综合上面的分析，可以得到：在（1）和（2）两种情形下，最优方案都是从 A 公司引进 6 人，从 B 公司引进 5 人。这个例子是在动态规划思路下严谨的分析过程，虽然比较烦琐，但是对锻炼动态规划的完整思维过程非常有用。如果对动态规划比较熟悉，则可以省去许多不必要的步骤。

4.2.5　小明该如何买书

【问题】

有一书店引进了一套书，共分为 A 卷、B 卷和 C 卷，每卷书定价是 60 元。书店为了搞促销，推出一次活动，活动内容如下：

如果单独购买其中一卷，那么可以打 9.5 折。

如果同时购买两卷不同，那么可以打 9 折。

如果同时购买三卷不同，那么可以打 8.5 折。

如果小明希望购买 A 卷 3 本、B 卷 4 本、C 卷 5 本，那么至少需要多少钱呢?

【解析】

虽然我们在生活中遇到的问题形式各样，但是在用动态规划进行处理的时候，其核心思想和主要步骤是不变的。最关键的地方就是细分问题。这个问题需要考虑的情形比较多，也比较复杂。但是，如果我们深入分析问题，就能够化繁为简。这里介绍一种特殊的动态规划方法，它就是贪心法。其本质是每次直接找到可以提供最优方案的细分问题，不用在不同的细分问题之间选出最佳方案。但是，无论如何，其核心思想和主要步骤变化不大。

首先，全面分析问题。

先进行深入分析，可以将细分问题的规模尽可能压缩。在选择买书方案时，从打折信息中可以得到：

（1）如果单买不同的两卷书，那么这个方案一定不会是最优方案，因为这两卷不同的书一起买打 9 折，比 9.5 折更加优惠，因此，最优方案中一定不含单买的两卷不同的书。

（2）如果出现单买一卷书，另外两卷一起买的情形，那么这个方案也一定不是最优方案，因为这三卷不同的书一起买打 8.5 折，比两卷打 9 折和一卷打 9.5 折更加优惠。

（3）如果出现两卷不同的书一起买，另外一卷不同的书和这两卷中的一卷一起买这种情形，例如，A 卷和 B 卷一起买，A 卷和 C 卷一起买，或者 A 卷和 B 卷一起买，B 卷和 C 卷一起买，或者 A 卷 C 卷一起买，B 卷和 C 卷一起买，那么它们的花费都是 120×0.9×2=216（元）。这时候也不可能是最优方案，因为将三卷不同的书一起买，另一卷单买，这样会更加优惠，这时候的花费是 180×0.85+60×0.95=210（元）。

其次，将问题进行细分。

总结上面三点可以发现，只要能够拼凑出不同的三卷，并且一起买，就会获得更多的优惠。因此，我们细分问题可以得到，最佳买书方案一定出现在这个小问题中：先一起买一卷 A 卷、一卷 B 卷、一卷 C 卷，再考虑购买 A 卷 2 本、B 卷 3 本、C 卷 4 本的最佳方案。接着，对这个问题不断细分，最后就可以发现最优方案出现在：先将不同卷的书各买 3 本，三种不同卷的书一起买，然后再考虑购买 B 卷 1 本、C 卷 2 本的最佳方案（见图 4-8）。

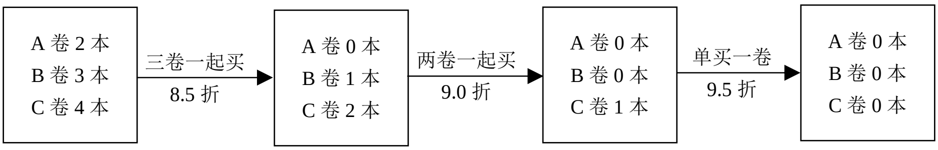

图 4-8 每次都是最优策略

最后，找到最优的解决方案。

对于上述的细分问题，仍然可以根据前面分析的结果细分，因为出现两种不同的书，一定要一起买。因此，最优的买书方案应该是：先将不同卷的书各买 3 本，三种不同卷的书一起买，然后再一起买 1 卷 B 卷和 1 卷 C 卷，最后单买 1 卷 C 卷。这个最优方案的花费是：

$$3 \times 180 \times 0.85+1 \times 120 \times 0.9+1 \times 60 \times 0.95=624$$（元）

注意，贪心算法一定要建立在严谨的逻辑分析和在对问题的全面考虑之上，不能仅凭直觉和经验断定最优方案一定会出现在细分后的某个小问题中。

第 5 章

多目标规划：化繁为简的规划方法

在现实生活中，我们在进行规划的时候，往往需要从不同的角度考虑问题。例如，在经济、管理、军事、科学和工程设计等领域，衡量一个方案的好坏往往难以用一个指标来判断，而需要用多个目标来比较，而这些目标有时不甚协调，甚至是矛盾的。这时候就需要多目标规划。

5.1 外行看懂多目标规划

多目标规划是平衡多个目标下的最优，在求得最优方案的同时，需要考虑各个目标所占的位置。多目标规划并不是面面俱到，满足各个目标的完美解决方案，而是权衡各方利弊，有所取舍得到的最合适方案。对于多目标规划，主要有下面三种不同的方法，它们的核心思想都是化繁为简，将多目标规划问题转化为单目标规划问题。

5.1.1 给每个目标加上权重

在有的多目标规划中，对于每个目标，我们的追求是所有的目标都能够完成，在各个方面都做到最好。例如，人们在找工作时，往往需要考虑前景、薪资、工作压力、离家距离、工作时间等各个方面。每个方面的目标仅仅代表着某一方面的理想情形，就算完成，也不可能是我们心中最优的方案。就好比，如果有一份离家非常近、工作悠闲、不用加班的工作，但是前景比较暗淡，并且薪资方面也比较低，那么这就可能不会成为你心中理想的工作。

在多目标规划中，很难做到面面俱到，各方面都求得完美，这时候应该清晰地考虑各个目标的重要性如何。例如，有的目标是主要的，有的目标则是次要的；有的目标是长期的，有的目标则是短期的；有的目标是必

须达到的，有的目标则只是附加的，不是必须完成的。对于不同的目标，它的重要性是不同的。

如何在多目标规划中对各个目标的重要性进行衡量呢?

数学的一大作用就是可以将直观的复杂事物抽象化，将看起来很难解决的问题变成可以计算的数学问题。对于多目标规划，同样可以将它化简为一般的线性规划问题。我们可以从各种各样的评分系统中找到一些启示。无论是公务员考试、研究生入学考试这种很严肃的全国性考试，还是质量检测、安全检测、卫生检测等一系列检测过程，甚至是各种类型的选秀活动、需要评分的综艺节目，都离不开一个非常重要的概念——权重。

权重就是事物所占的比例，往往用来衡量某个方面的重要性，不同重要性的事物，自然在整体中所占的权重是不一样的。例如，在一些选秀比赛中，评委需要对选手的五官、身材、气质、谈吐、才艺等各个方面进行评分，并且不同的方面在总分中所占的比例不同，最后才得到选手的总分。

类似的，对于多目标规划，可以给不同的目标加上不同的权重，意味着这个目标在全局中所占的比例，或者在人们心中的偏爱程度。给每个目标加上给定的权重之后，我们通过简单相加便能够得到全局的总目标。这时候，多目标规划问题又会变为一般的规划问题，只要寻找到这个总目标的最优解决方案即可。

例如，年轻人在找工作时，心中完美的工作是“钱多、事少、离家近”，这时候可以用三个不同的目标来分别描述：f_1 代表工资待遇高，f_1 的值越高意味着工资待遇越高；f_2 代表工作轻松，f_2 越高就代表工作越轻松；f_3 代表工作地点离家近，f_3 越高意味着工作地点离家越近。再给这三个不同的目标依次配上不同的权重 ω_1、ω_2、ω_3，这个权重是根据人们心中的偏好，

再综合父母和朋友的建议设置的。需要注意的是$\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$，因为这三个数只代表在全局中所占的比例。

因此，在找工作的时候就不再需要从三个方面来单独考虑了，只需要考虑$\omega_1 f_1+\omega_2 f_2+\omega_3 f_3$即可，只要能够让这个式子的值尽可能大，那么这就是一份理想的工作。如果认为工作压力和离家距离一样重要，但工资比它们稍微重要些，那么不妨将三个权重分别设置为：$\omega_1=0.4$，$\omega_2=0.3$，$\omega_3=0.3$，这时候，只需要考虑能够使$0.4f_1+0.3f_2+0.3f_3$最大的工作就可以了。

从上面的例子中可以看出，如果不加上权重，不进行衡量，就需要从三个方面来进行规划，并且规划得到的结果也不一定会让人满意。这会让很多人感到纠结，到底选哪个方案最合适，同时又觉得每个可行的方案都不合适，都有缺陷。但是，在进行权衡，为各个目标加上权重之后，三个问题就简化为一个规划问题，不会再有任何令人纠结的地方，只需要找到总目标下的最优方案就行了。因此，在多目标规划中，为各个目标加上合适的权重，这是一种化繁为简的方法。

需要注意的是，在多目标规划中，有些时候，目标之间是相互排斥的。例如，在生产过程中，一方面想提高产量，另一方面想减少员工加班时间。显然，这两个目标是相互矛盾的，如果想尽可能地提高产量，就需要员工加班；如果不想让员工加班，则产量的提高空间很有限。我们用两个目标f_1、f_2来分别代表产品数量和员工加班时间，因此，f_1需要越大越好，而f_2则需要越小越好。同样的，我们给f_1、f_2分别加上不同的权重ω_1、ω_2，这时总目标的设定不再是简单的相加，而是$\omega_1 f_1-\omega_2 f_2$，这个式子最大时，才是最优的解决方案。因为要使$\omega_2 f_2$很小，就意味着要使$-\omega_2 f_2$很大。

5.1.2　平方之后再加权

在上述找工作的例子中，各方面的目标都是值越大越好，例如，工资待遇当然是越多越好，工作压力当然是越小越好，这些都是不设限的目标。可是，很多时候，人们的目标并不是这样的。在实际生产过程中，对于每个产品的规格都需要达到一定的标准，例如，质量需要达到××克、长度需要是××厘米等。这时候，人们的目标就是让产品尽可能地达到这些限定的目标，让误差减小到 0。

因此，在一些多目标问题中，理想目标就是要达到某一个数值，在实际过程中就是要尽可能地接近这个值，而不再是越大越好或者越少越好。最典型的就是生产过程中的产品规格。仅仅依靠上述简单的加权处理，并不能找到多目标问题的最优解决方案，这时候就需要平方加权的思想。

在某个多目标问题中，共有三个不同的目标 f_1、f_2 和 f_3，我们希望这三个目标尽可能接近最理想的某个值：f_1 的理想值是 F_1，f_2 的理想值是 F_2，f_3 的理想值是 F_3。这时候，我们为了让三个目标都达到理想值，就需要使得$(f_1-F_1)^2$、$(f_2-F_2)^2$和$(f_3-F_3)^2$尽可能小。同时，再结合前面给每个目标加权的方法，我们也可以根据这三个目标在全局中的重要程度，给这三个平方分别加上不同的权重ω_1、ω_2、ω_3，其中$\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$。

经过上述处理，这个多目标问题就变成一个普通的规划问题，只需要考虑单一的目标$\omega_1(f_1-F_1)^2+\omega_2(f_2-F_2)^2+\omega_3(f_3-F_3)^2$，让这个目标值尽可能小就行了。这样，我们找到的最优方案一定是对于全局来说最优的，在整体上最接近 F_1、F_2 和 F_3 这三个理想值的。

例如，我们如何从一批产品中找到那个最接近理想标准的最佳产品呢？如果我们所关注的产品标准只有长度和宽度，并且长度的理想值是 80 毫米，宽度的理想值是 20 毫米，而我们测得的产品长度是 x 毫米，宽度

是 y 毫米，因此$(x-80)^2$就可以表示产品长度的误差，$(y-20)^2$就可以表示产品宽度的误差。另外，如果长度和宽度都是同等重要的，就可以分别给两个误差加上 0.5 的权重，也就得到 $0.5(x-80)^2+0.5(y-20)^2$，这个目标就可以用来衡量产品的总体误差。因此，在这批产品中，只要某个产品能让这个目标值最小，它就是其中最符合标准的产品。

5.1.3 评定优先顺序

上述两种方法，第一种适合目标追求没有限制的多目标问题，第二种适合目标是尽可能接近某一理想值的多目标问题，这两种方法都需要设置各个目标的权重，从而将多个目标的规划问题转化为单个目标的规划问题。但是，对于各个目标的权重该怎么设置，这会变成规划时的又一个难题。如果各个目标的权重设置不当，就会造成最后得到的结果很可能不合适。

如果不考虑设置权重，那又采用什么办法来求得全局角度的最优方案呢?

这时候可以采用评定优先顺序的方法来解决多目标问题。在很多多目标问题中，虽然我们难以用准确的数值来给各个目标设置权重，但是可以根据自己的粗略了解，给各个目标评定一个优先顺序，将最重要的目标放到首位，将最不重要的目标放到末位。接着，我们可以在进行规划时，一层一层地寻找，先不考虑其他目标，只寻找最重要目标的最优方案，得到的是一个范围。然后再从这个范围内寻找第二个目标的最优方案，这时这个范围就会缩小。再从得到的范围内寻找第三个目标的最优方案。依次类推，当我们找到最后一个目标的最优时，得到的就是全局的最优方案。

这种方法不用设置准确的权重，只需大致给出一个优先顺序，然后依

次找到最优就行了。可以看出，这种方法需要一层一层地寻找最优，对于每一层，只需考虑一个目标即可，都只是一个一般的规划问题。

5.1.4　消去次要的目标

前两种方法的基本思想都是按重要性不同给予各个目标不同的权重；第三种方法的基本思想是将各个目标按照优先顺序进行排序，先考虑第一个目标中的最优方案，然后再在第一个目标的最优方案中寻找满足第二个目标的最优方案，再以此类推，最后得到一个全局范围内的最优。但是，无论是设置权重，还是给目标排序，都不会是一件轻松的事。对于多目标问题，还有更简单的处理方法吗?

这时候可以采用一种很简单的方法：只需考虑主要目标，将次要目标全部转化为规划问题中的一个个条件，只要在我们可以接受的范围内即可。这时候，多目标规划问题同样会变成一般的规划问题。例如，现在有一个多目标问题，共需要考虑三个不同的目标 f_1、f_2 和 f_3，其中我们只知道 f_1 是主要目标，其余目标是次要目标，但是我们无法进一步确定它们的权重。这时，经过分析发现，对于 f_2，如果大于 a 就很不错了；对于 f_3，我们很乐意接受 $f_3>b$。因此，对于这个多目标规划问题，我们只需要考虑 f_1 的最大值，对于 f_2 和 f_3，只需在规划中加入 $f_2>a$ 和 $f_3>b$ 这两个条件就行了。

这种方法的基本思想就是：对于多个目标，抓住其中最主要的一个目标，对于其余的次要目标，只要在可以接受的范围之内就行了。因此，不用设置权重，只需要给次要目标设定一条可以接受的底线，就能将多目标规划问题化简为一个普通的规划问题。

还是找工作的例子，假设只从薪资高、工作轻松、离家距离近这三个

方面来权衡时，它们的目标依次是 f_1、f_2 和 f_3，数值越高对人们的吸引力就越大。人们在进行规划时不一定对自己的偏好非常明确，因此难以对这三个目标的权重做出准确的判断。但是，每个人都会在心里有主次之分，并且也很容易给出自己的底线。假如某个人在找工作时主要考虑的是薪资待遇，即 f_1，同时工作压力不想太大，即 $f_2 > a$，并且离家距离也不想太远，即 $f_3 > b$。因此，在找工作时，首先从工作压力和离家距离方面考虑，不能满足基本要求的都可以排除，之后再在剩下的可选项中选择薪资最高的工作。这时候就找到了一份对于全局来说最优的工作。

这种将目标转化为条件的做法在 5.2.5 中也有体现，就像这个案例所展示的，用原料兑制成品时，就需要严格把握各种原料的比例，不能超标，也不能不足，这时候的目标就可以转化为问题的条件。这也说明，如果有的目标是需要底线的，那么只要满足底线，就是我们可以接受的，而没有满足底线则是我们所不允许的，那么，这个目标就需要转化为规划问题中的条件，从而达到将多目标规划问题化简的目的。

5.1.5 二八定律

如果说上述 4 种方法是理性的方法，那么二八定律就能给我们带来感性上的认识。二八定律不是一种具体的方法，但是可以给我们在处理多目标问题时提供启发，以达到让人意想不到的效果。

什么是二八定律?

二八定律是由意大利经济学家帕累托在 19 世纪提出的。当时帕累托从许多资料中都发现了一种现象：很多国家 80%的社会财富都掌握在 20%的人手中。他发现，财富在人口中的分配是不平衡的，并且这种不平衡是一种比较稳定的普遍现象。后来人们还发现生活中存在许多不平衡的

现象。这些不平衡的现象都可以用二八定律来概括：

20%的商品和20%的客户决定了企业80%的营业额；

20%的人口消耗了80%的资源；

20%的学生占据了80%的教育资源；

20%的驾车人造成了80%的交通事故；

20%的罪犯实施了80%的犯罪活动；

20%的投入决定了80%的收获；

……

如今，各种各样的问题，诸如时间管理问题、资源分配问题、核心产品问题、核心利润问题、个人幸福问题等都能够从二八定律中得到启发。在多目标规划问题中同样出现了二八定律。因此，在现实生活中，在处理多个目标的问题时，特别是时间、金钱、人力等各方面的资源有限的情形下，就应当有目的地进行取舍，着力于最关键的20%的目标，在战略上忽视剩下的80%的目标。

需要注意的是，在二八定律中，20%和80%只是一个象征性的比例，并不是普遍意义上的20%的投入一定决定恰好80%的产出。显然，这种刻板的理解是很荒谬的，是对二八定律的一种误读。

总之，对于多目标规划问题，我们求得的最优方案不可能像单目标规划问题中的最优方案那么精确，但这并不影响上述这些方法和思想在解决多目标规划问题时的作用。很多时候，我们也没必要求得理论上的最优方案，那会增加求解这些问题的难度。因此，对待多目标规划问题，重在用合适的方法将问题化简，求得一个合适的优化方案。

5.2 生活中的多目标规划

5.2.1 如何采购喜糖

【问题】

设市场上有甲级糖和乙级糖，单价分别是 4 元/斤和 2 元/斤。现在要筹办一桩喜事。“筹备小组”计划的总花费不超过 40 元，糖的总斤数不少于 10 斤，其中甲级糖不能少于 5 斤。但是，“筹备小组”在选择最优采购方案时不能形成统一的衡量标准，他们提出了各种各样的目标。有人觉得应该节省，应该选择总花费最小的采购方案；有人讲究数量，觉得应该让糖的总数尽可能大；还有人则注重品质，认为甲级糖的总数应该最大。

对于上述问题，你会为“筹备小组”选择什么样的采购方案，做到让大家都能接受呢?

【解析】

首先，分析问题，假设未知数。

上述问题是一个典型的多目标规划问题，对于多目标规划问题的解决方法往往不止一种，不同方法得到的最优方案可能也不同，但这并不冲突，因为多目标问题的规划本来就是一个权衡取舍的过程。

在这个问题中，不妨假设采购甲级糖 x 斤，乙级糖 y 斤。

其次，列出问题的各项目标。

在上述问题中，共有 3 个目标。

（1）总花费最少，即 $4x + 2y$ 应当最大。

（2）总斤数最大，即 $x+y$ 应当最大。

（3）甲级糖的斤数最大，即 x 应当最大。

对于这三个目标，我们可以给它们分别设置权重。

最后，确定简化多目标的方法。

如果三个目标同样重要，那么，将它们的权重都设置为 $\frac{1}{3}$。这时候便能得到一个新的目标：$\frac{1}{3}(4x+2y)+\frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{3}x$。因此，我们在规划时只要让这个目标尽可能大就行了。显然，这就是一个一般的线性规划问题，按照我们学过的线性规划的办法求解就行了。

5.2.2　如何安排加班

【问题】

某工厂生产两种产品，每件产品甲可获利 9 元，乙可获利 6 元。每生产一件产品甲，需要 3 小时；每生产一件产品乙，需要 2.5 小时。若加班生产，则每件产品甲的利润降低 1.5 元；每件产品乙的利润降低 1 元。但加班总时间不能超过 120 小时。决策者希望生产得到的利润尽可能多，同时又不想占用员工太多的加班时间。那么，该如何安排加班时间的生产，能够尽可能满足这两个目标呢?

【解析】

首先，分析问题，列出未知数。

在安排生产甲和乙两种产品时，显然，我们需要考虑的是，在加班时，多少时间用于甲产品的生产，多少时间用于乙产品的生产。因此，可以设

置两个未知数，加班时用 x 小时生产甲产品，用 y 小时生产乙产品。

其次，列出问题的各项目标。

从上述问题中可以得到两个目标分别是：

（1）产品的总利润尽可能多，此时，每件甲产品的利润变为 7.5 元，每件乙产品的利润变为 5 元，也就得到产品总利润是 $\frac{7.5x}{3}+\frac{5y}{2.5}$，即 $2.5x+2y$。

（2）加班时间尽可能少，此时，总加班时间可以表示为 $x+y$。

最后，确定简化多目标的方法。

在这个问题中，我们采用设置权重的方法。假设产品的总利润更重要，我们设置产品总利润的权重为 0.6，也就得到加班时间的权重应该是 0.4。这里需要注意的是，加班时间越短越好，因此，我们得到的总目标就是：

$$0.6(2.5x+2y)-0.4(x+y)$$

化简后就得到：

$$1.1x+0.8y$$

因此，我们只要在规划中求得使上述式子最大的 x 和 y 就行了。根据加班总时间不能超过 120 小时，可以得到此时的条件是 $x+y\leqslant 120$。这就是一个一般的线性规划问题了。

5.2.3 如何装配电视机

【问题】

某电视机厂装配黑白和彩色两种电视机，每装配一台电视机需占用装

配线 1 小时，装配线每周计划开动 40 小时。预计市场每周彩色电视机的销量是 24 台，每台可获利 90 元；黑白电视机的销量是 30 台，每台可获利 30 元。该厂确定的目标如下。

第一优先级：装配电视机的数量尽量满足市场需要。

第二优先级：充分利用装配线，每周至少开动 40 小时。

第三优先级：允许装配线加班，但加班时间每周尽量不超过 10 小时。

该电视机厂应该如何安排装配线?

【解析】

首先，分析问题，列出未知数。

在这个问题中，具有三个不同优先级的目标，这是一个多目标规划问题。假设每周为黑白电视机分配 x 小时，为彩色电视机分配 y 小时。

其次，列出问题的各项目标。

根据问题和所设的未知数，可以得到每周的黑白电视机产量是 x 台，彩色电视机的产量是 y 台。因此，可以得到如下目标。

第一优先级的目标：$x-30$ 和 $y-24$。

第二优先级的目标：$40 \leqslant x+y$。

第三优先级的目标：$x+y \leqslant 50$。

最后，确定简化多目标的方法。

根据题干中各目标的优先级，首要的目标是装配电视机的数量尽量满足市场需要，而次要的目标则是确保装配线每周的开动时间为 40～50 小时（加班 10 小时）。因此，这个多目标规划问题适合采用消去次要目标的

方法。将两个次要目标变为规划问题中的条件：$40 \leqslant x + y \leqslant 50$。

对于首要的目标：确保电视机的数量尽量满足市场需要，市场需要的值就是那个理想值。因此，又适合采用平方加权的方法。其中，黑白电视机满足市场需要的目标是$(x-30)^2$，彩色电视机满足市场需要的目标是$(y-24)^2$，我们要做的就是让这两个目标值尽可能小。

那么，如何给它们设置权重呢？由于彩色电视机的利润比黑白电视机要高，并且刚好是黑白电视机的 3 倍，所以在设置权重的时候，最好将彩色电视机的权重设为黑白电视机的 3 倍，以体现出彩色电视机的重要性。同时，它们的权重加起来等于 1，因此，可以得到黑白电视机的权重是 0.25，彩色电视机的权重是 0.75，也就得到总的目标是：

$$0.25(x-30)^2 + 0.75(y-24)^2$$

在这个多目标规划问题中，我们灵活使用了两种方法，先将次要目标化为条件，接着对主要目标采用平方加权的方法，将这个多目标规划问题简化成一个单目标规划问题。从这里也可以看出，对于一些多目标规划问题，我们可以灵活地采用各种不同的方法，将多目标规划问题简化为单目标规划问题。

5.2.4 给员工涨工资

【问题】

某公司人事部考虑给公司员工进行升级调资。目前公司共有基础岗位和管理岗位，管理岗位的工资是 10 万元/年，基础岗位的工资是 6 万元/年。管理岗位的员工目前只有 10 人，基础岗位的员工目前只有 25 人。为了保证效率，公司规定管理岗位最多不能超过 15 人，基础岗位最多不能超过 30 人。现在，公司准备的方案必须尽可能满足下面两个目标：

（1）新增工资预算是一定的，因此，在这次调整中新增的年工资总额只能在 60 万元左右。

（2）基础岗位的员工可以升级到管理岗位，基础岗位的不足只能通过招用新员工来弥补。为了提高员工的积极性，最好基础岗位现有人数的 20%都能在这次调整中升级。

公司人事部应该如何制定这次调整方案?

【解析】

首先，分析问题，列出未知数。

在这个问题中有两个目标，因而是一个多目标规划问题。不妨设计划从基础岗位调 x 名员工到管理岗位，再招收 y 名员工到基础岗位。

其次，列出问题的条件和各项目标。

根据所设未知数，可以得到这个问题的条件是：$10+x\leqslant 15$, $25+y-x\leqslant 30$。对于这个问题的目标，可以发现两个目标分别是：

（1）每年新增的工资应该在 60 万元左右，即 $10x+6y=60$。

（2）基础岗位的升职人员应该在 20%左右，即 $x=0.2\times 25$。

最后，确定简化多目标的方法。

从上面可以看出，这两个目标都要尽可能地靠近某个确定的数值，因此，这个问题适合用平方加权的方法进行化简。那么，又该怎么设置这两个目标的权重呢?

显然，在预算一定的情况下，要让基础员工升职的比例达到 20%，这里面预算是首先要考虑的，因此，目标（1）的权重应该大于目标（2）。但两个目标都值得考虑。这里不妨将目标（1）的权重设置为 0.6，将目标

（2）的权重设置为 0.4。这时候，总目标就可以用 $0.6(10x+6y-60)^2+0.4(x-5)^2$ 来进行衡量，能让这个式子的值最小的方案就是最佳方案，这时候的条件是：$10+x\leqslant 15, 25+y-x\leqslant 30$。显然，这是一般的规划问题。

5.2.5　如何兑制酒

【问题】

某种品牌酒是用甲级、乙级和丙级这三种等级的原料酒兑制而成的。对于甲级原料酒，每天的供应量是 1500 千克，每千克的成本是 6 元；对于乙级原料酒，每天的供应量是 2000 千克，每千克的成本是 4.5 元；对于丙级原料酒，每天的供应量是 1000 千克，每千克的成本是 3 元。

对于这种品牌的酒，有红色和蓝色两种不同的型号，各种型号的酒对原料酒的混合比例和售价都不相同。对于红色型号，甲级酒的含量必须大于 50%，丙级酒的含量必须小于 10%，它每千克的价格是 5.5 元；对于蓝色型号，甲级酒的含量必须大于 10%，丙级酒的含量必须小于 50%，它每千克的价格是 4.8 元。

现在，决策者规定：首先必须严格按规定比例兑制各型号的品牌酒；其次是获利最大；最后，红色型号的品牌酒每天至少生产 2000kg。请问：决策者该实行怎样的制酒方案呢?

【解析】

首先，分析问题，列出未知数。

在这个多目标规划问题中，这名决策者的制酒方案考虑的是：红色和蓝色这两种不同型号的品牌酒分别使用多少甲级原料酒、多少乙级原料酒和多少丙级原料酒。因此，这个问题中要设置的未知数是：假设生产红色

型号的品牌酒需要甲级原料酒 x_1 千克，需要乙级原料酒 y_1 千克，需要丙级原料酒 z_1 千克；生产蓝色型号的品牌酒需要甲级原料酒 x_2 千克，需要乙级原料酒 y_2 千克，需要丙级原料酒 z_2 千克。

其次，列出问题的条件和各项目标。

对于三种原料酒来说，每天的供应量是有限的，生产红色和蓝色型号的品牌酒所使用的原料酒不能超过每天的供应量，也就得到这个问题的条件：

$$x_1 + x_2 \leqslant 1500，y_1 + y_2 \leqslant 2000，z_1 + z_2 \leqslant 1000$$

同样的，可以得到这个问题的三个目标。

第一个目标：严格按照规定比例兑制各种型号的品牌酒。

对于红色型号：$\dfrac{x_1}{x_1+y_1+z_1} > 50\%$，$\dfrac{z_1}{x_1+y_1+z_1} < 10\%$。

对于蓝色型号：$\dfrac{x_2}{x_2+y_2+z_2} > 10\%$，$\dfrac{z_2}{x_2+y_2+z_2} < 50\%$。

第二个目标：总的获利应该表示为红色型号的利润与蓝色型号的利润之和。

对于红色型号品牌酒的利润，表示为 $5.5(x_1 + y_1 + z_1) - 6x_1 - 4.5y_1 - 3z_1$；对于蓝色型号品牌酒的利润，表示为 $5.5(x_2 + y_2 + z_2) - 6x_2 - 4.5y_2 - 3z_2$。因此，总的利润表示为：

$$5.5(x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2) - 6(x_1 + x_2) - 4.5(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2)$$

第三个目标：红色型号的酒至少要生产 2000 千克。

$$x_1 + y_1 + z_1 \geqslant 2000$$

最后，确定简化多目标的方法。

对于第一个目标，可以发现，只要在严格规定的比例范围之内，各种原料酒的比例都是能够接受的，因此，这个目标可以转化为规划问题中的条件。

对于第二个目标，两种型号的酒的总利润当然是越大越好，因此，可以成为最终的目标。

对于第三个目标，和第一个目标一样，红色型号的酒只要在范围内都可以接受，因此，同样可以转化为规划问题的条件。

这时候，三个目标中的两个已经转化为规划问题中的条件，只需要求出满足这些条件时总利润最大的制酒方案就行了。这个复杂的多目标规划问题就变成了一个线性规划问题。

第 6 章

图论问题：用图形将问题简化

现实生活中的很多事物都可以进行简化和抽象，用图形来表示，如路线规划、任务安排、流程设置、人工智能等都离不开点和直线这些最简单的图形。图形是一种很重要的抽象方法。了解一些处理图形的基本方法，能够帮助我们解决许多和图相联系的实际问题。

6.1 什么问题和图有关

运筹学中的许多规划问题都需要通过图形来解决，这不同于前面的线性规划、动态规划等，这里的图形是指用来描述问题的点和线段等。通过将问题简化为图形，能够帮助我们找到这些问题中的最优方案。

6.1.1 从“哥尼斯堡七桥问题”说起

哥尼斯堡七桥问题是 18 世纪著名的古典数学问题之一。这个问题具体是这样的：在哥尼斯堡的一个公园里，有七座桥将普雷格尔河中 A、D 两个岛及岛与河岸 C 和 B 连接起来（见图 6-1）。问是否可能从这四块陆地中的任意一块出发，恰好通过每座桥一次，再回到起点？这个问题也可以简化为图 6-2，是否能够用一笔将 A、B、C 和 D 四点用图中的方式连接起来？

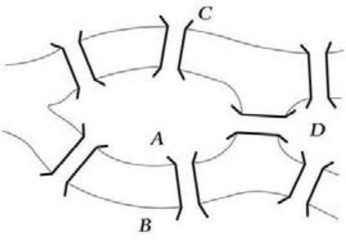

图 6-1　哥尼斯堡七桥问题原图

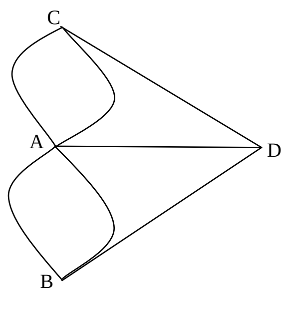

图 6-2　七桥问题简化图

正是因为上述问题，才有了数学家对于这类图形问题的激烈讨论，才有了现在的图论数学，才有了运筹学中用图论来解决最优化问题的做法。对于七桥问题，当时许多人都绞尽脑汁，采用了各种办法，就是不能找到符合要求的路线，但也不能证明这种路线根本不存在。之后，欧拉将七桥问题简化为图 6-2 所示的形式，这就变成了一个更加形象直观的一笔画问题。欧拉经过不断尝试，最终证明了七桥问题不可能存在满足要求的路线，并在之后创立了数学中的图论。

除了七桥问题，历史上还有许多有名的问题都需要通过图形来解决。例如，著名的“汉密尔顿问题”，至今还被当作一些实际问题的模型，广泛应用于运筹学、计算机科学等领域。这个问题是由英国数学家汉密尔顿提出的，问题的原型是这样的：在一种旅游类游戏中，世界是用一个规则的实心十二面体来表示的，它的 20 个顶点就是全世界最著名的 20 个城市，现在要求游戏者“绕行世界”，从某个“城市”出发，沿着这个“世界”的棱，通过每个“城市”恰好一次，最后再回到自己出发的地点。也就是说，找一条沿着十二面体各边通过每个顶点刚好一次的闭回路。

此外，还有看起来简单但证明过程复杂的四色问题，以及看起来简单但解决方案复杂的旅行推销员问题。四色问题是人们在给地图着色的工作中发现的，每幅地图都可以只用 4 种颜色着色，就能够将有共同边界的国家分别着上不同的颜色。这个问题看起来很简单、很直观，但是证明它却花了数学家不少心思。

旅行推销员问题和七桥问题很类似，不同之处在于前者是一个求最优的问题。旅行推销员问题也叫货郎担问题，它具体是这样的：假设有一位旅行商人要拜访 n 个城市，他必须选择所要走的路径，路径的限制是每个城市只能拜访一次，而且最后要回到原来出发的城市。路径的选择目标是要求得的路径路程为所有路径之中的最小值，推销员该如何选择这样一条路径？

在我国，著名运筹学专家管梅谷教授于 1960 年提出了一个“中国邮路问题”，这个问题实质上也是一个求最短路径的规划问题，具有广泛的应用价值。这个问题具体是：一名邮递员如何选择一条道路，使他能从邮局出发，走遍他负责送信的所有街道，最后回到邮局，并且所走的路程最短。

上述这些问题都是非常经典的，有些难度非常大，但是在日常生活中，我们经常遇到的和图形相关的规划问题基本上可以概括为三类：求最短（长）路径、规划最短连接线路、将任务排优先级。这三类都是实际生活中最常用的图形问题。在求这些问题的最优方案之前，首先要能够用图形来描述问题。

6.1.2 用图形来描述问题

学会用图形将一些实际问题描述出来，将复杂化为简单，这是解决图形相关问题的第一步，也是最基础的一步。用图形来描述问题，最简单的是要熟练掌握点（圆圈）和线，因为一切图像都是由点和线构成的。需要注意的是，有些时候，我们用来描述问题的直线还会带有方向，表示某种特定的关系。

用点（圆圈）来表示的往往是某件事、某个地点、某个时刻等，可以发现，这些都是固定的，并且不能用来衡量大小、长短，非常适合用一个点（圆圈）来表示。用线来表示的往往是两件事之间的关系、两个地点之间的距离、两个时刻之间的时间间隔等，这些涉及关系、距离、大小等，就需要用线来表示，必要的时候还需要加上方向。

在上述“中国邮路问题”中，就可以用点来表示某个地点，用线段来表示两个地点之间的距离，给每条线段标上一个数用来表示这两点之间的

距离。不妨假设有一个邮局和四个送信地点 A、B、C 和 D，这时候每两点之间的距离如图 6-3 所示，如果你是那个邮递员，那么你会选择一条怎样的最短路线，从邮局出发，将四个地点全部走一遍，之后再回到邮局呢？

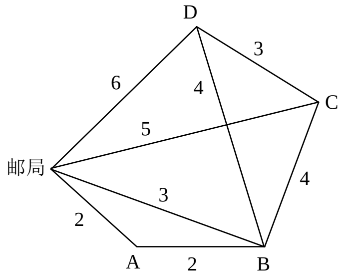

图 6-3 中国邮路问题

经过许多种不同路线的比较，你一定会得到最短路线是先从邮局到 A 地，再到 B 地，再到 D 地，再到 C 地，再回到邮局，这时候总的路径长度是 16，比其他线路都要短。

还有，在某次篮球比赛中，共有甲、乙、丙、丁四支队伍，进行单循环赛，即两两之间进行一次比赛即可。这时候，已知甲队和乙队、丙队、丁队这三支队伍都进行过比赛，乙队、丙队这两支队伍都和丁队进行过比赛。这时候，同样可以用 A、B、C 和 D 四点来分别表示甲、乙、丙和丁四支队伍，每两点之间连接一条线，就表示这两支队伍之间已经进行过一次比赛。这时候，这些信息就可以用图 6-4 来表示。

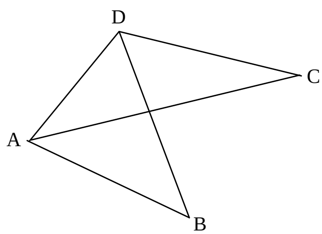

图 6-4 四支队伍之间的比赛图

同样还是刚刚篮球比赛的例子，现在我们进一步考虑如何在图形之中表示出两支队伍之间的胜负关系。显然，胜负关系是一种特定的关系，有获胜方和落败方的区别，仅仅依靠一条没有方向的线段是不能体现这种关系的。这时候就需要在线段之中加上箭头，用来表示方向，我们不妨假设箭头指向的方向为落败方，如果已经进行的五场比赛的胜负情况是：丁胜甲、甲胜乙、甲胜丙、乙胜丁、丁胜丙，它们就可以用图 6-5 来表示，这时候箭头的方向对应起来就是：D 到 A，A 到 B，A 到 C，B 到 D，D 到 C。

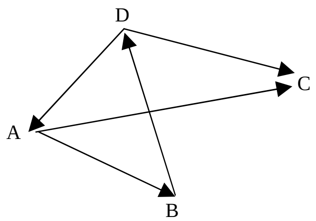

图 6-5　四支队伍之间的比赛图（含胜负）

最后需要注意的是，我们用图形来描述问题，只需关注图形中标记的点、线段、长度、箭头方向等，这些才是用来描述问题的关键点；而不用考虑图形本身的线段长度、线段粗细、各个点的相对位置等，这些和问题无关，并不重要。

6.1.3　如何求最短路径

生活中总有问题需要规划路线，需要考虑最短路径。在物流系统中，选择两地之间的最短路径可以节省运输成本；在旅游时，选择景点之间的最短路径可能帮助我们节省时间。那么，如何从复杂的地图上求得两点之间的最短路径呢?

如图 6–6 所示是一幅简单的地图，其中 A、B、C 和 D 分别表示 4 个不同的地点，线段表示两个地点之间是连通的，而箭头则表示两个地点之间的路线方向，线段旁的数字表示两个地点之间的距离。现在要求得从 A 地到 C 地的最短路径。从图 6–6 中可以看出，从 A 地到 B 地共有三条路径。

（1）从 A 地出发到 D 地，再到 C 地，这条路径的总长度是 7。

（2）从 A 地出发到 B 地，再到 C 地，这条路径的总长度是 5。

（3）从 A 地出发直接到 C 地，这条路径的总长度是 6。

从上述三条路径的长度中可以看出，A 地到 C 地的最短路径应该是路线（2），即从 A 地出发到 B 地，再到 C 地。

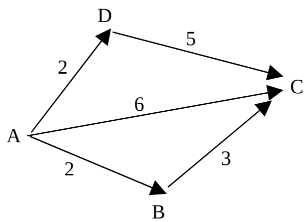

图 6–6　简单的地图

上面这种方法是将两点之间的所有路线都列出来，然后逐条路径进行比较，选择路径最短的那条路线即可。这种求最短路径的方法简单明了、容易理解，但是遇到地图上的地点和路线较多时，如果一一列出来比较，就显得效率很低了，如图 6–7 就是比图 6–6 复杂得多的地图。那么，对于这些更复杂的地图，有没有更好的求最短路径的方法呢?

对于上述问题，我们还可以用另一种方法来求从 A 地到 F 地的最短路径。这时候，我们可以采用动态规划的方法，将最短路径的复杂问题进行细分，再通过解决最基本的小问题，从而得到原来问题的最优方案。

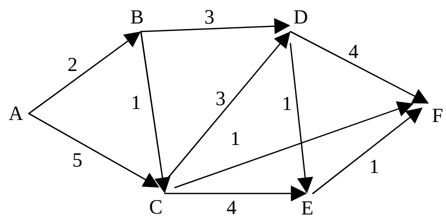

图 6-7　更复杂的地图

上述问题是需要求从 A 地到 F 地的最短路径，这个问题就可以细分为两个小问题：

（1）从 A 到 B，再求从 B 到 F 的最短路径。

（2）从 A 到 C，再求从 C 到 F 的最短路径。

我们只需要求得这两个问题中的最短路径即可。

进一步，对于问题（1）又可以细分为两个小问题：

（1–1）从 B 到 C，再求从 C 到 F 的最短路径。

（1–2）从 B 到 D，再求从 D 到 F 的最短路径。可以得到，这时候从 A 到 F 的路径总长度是 9。

对于问题（2）又可以细分为三种情形：

（2–1）从 C 到 D，再到 F，长度为 7。

（2–2）从 C 直接到 F，长度为 1。

（2–3）从 C 到 E，再到 F，长度为 5。

因此，从 C 直接到 F 是最短的，也就是说，对于问题（2），最短的路径方案是从 A 到 C，再到 F，这时路径总长度是 6。

现在还有问题（1–1）没有求得最短方案，需要求得从 C 到 F 的最短路径。由前面的结论可知，从 C 直接到 F 是最短的。因此，对于问题（1–1）来说，最短的路径方案是从 A 到 B，再到 C，最后直接到 F，这时路径总长度是 4。

综合上面的分析，可以得到：

对于问题（1–1）来说，最短路径长度是 4。

对于问题（1–2）来说，最短路径长度是 9。

而对于问题（2）来说，最短路径长度是 6。

因此，在整幅地图中，从 A 到 F 的最短路径是从 A 到 B，再到 C，最后到 F，这时总长度是 4。

上述动态规划方法可以帮助我们减少枚举的次数，并且能确保我们不会遗漏最短路径。如果对于上述解决方法仍然觉得烦琐，那么还有更加简便的求最短路径的方法。这种方法的基本思想是贪心算法，即每一阶段找到最优，就能得到最后的最优方案。

对于任何一条最短路径，是不是最短路径中的一部分也是两点之间的最短路径呢？例如，在上述问题中，从 A 到 F 的最短路径是：从 A 到 B，再到 C，最后到 F。是不是从 A 到 C 的最短路径也是从 A 到 B，再到 C 呢？或者，从 B 到 F 的最短路径也是从 B 到 C，再到 F 呢？

上述这些问题的答案都是肯定的，也就是说，步数较多的最短路径一定是建立在步数较少的最短路径的基础上的。那么，我们能不能先找到离起点较近的点和起点之间的最短路径，然后在此基础上再找稍远的点和起点之间的最短路径，直到最后得到目的地和起点之间的最短路径？例如，在上述问题中，我们可不可以先找到从 A 到 B、从 A 到 C 的最短路径，

再找稍远一点的从 A 到 D、从 A 到 E 的最短路径，最后再得到从 A 到 F 的最短路径？这是因为，在从 A 到 F 的最短路径中，一定包含了步数较少的最短路径，例如，从 A 到 C。

从另一个角度来说，既然步数长的最短路径是由步数较短的最短路径组成的，是不是也就说明了如果一条路径不是最短路径，那么它一定不会出现在后面的所有最短路径之中？因此，在求两点之间的最短路径时，当我们发现地图中的某条路径不是最短路径时，就可以从地图上把这条路径中不是最短路径的那部分删掉，从而达到简化地图的目的。例如，在图 6-7 中，我们得到 A—B—C 是从 A 到 C 的最短路径，就可以将 A—C 的连线删掉，后面的分析过程都不必再考虑这条连线。这时候得到图 6-8。

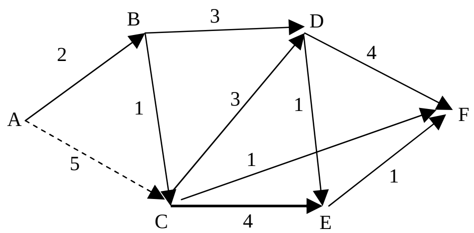

图 6-8　A—B—C 最短，删掉 A—C，用虚线表示

综合起来，就是先找距离较近的点和起点之间的最短路径，并且把不是最短路径中的连线删掉，从而简化地图；再找距离稍远的点和起点之间的最短路径，同样删掉没有在最短路径中的连线；依次类推，直到得到从起点到目的地之间的最短路径。像这种从起点开始逐渐扩展的方法就叫作迪杰斯特拉算法。

按照上面的分析，我们可以重新解决图 6-7 中从 A 到 F 的最短路径问题。

对于 B 点：A—B，长度是 2。由于只有 A—B 一条路径，因此 A—B 是从 A 到 B 的最短路径。

对于 C 点：A—C，长度是 5；A—B—C，长度是 3。显然，A—B—C 的长度小于 A—C 的长度，并且从 A 到 C 只有这两条路径，因此 A—B—C 是从 A 到 C 的最短路径，从地图中删掉 A—C 这条连线，如图 6-8 所示。

对于 D 点：由于 A—C 不是最短路径，已经删掉，从 A 到 D 需要考虑的路径变得很少了，这正是这种方法的妙处，帮助我们去掉了一些多余的计算。这时，从 A 到 D 有两条路径：A—B—D，长度为 5；A—B—C—D，长度为 6。显然，前者长度较短，因此，从 A 到 D 的最短路径是 A—B—D。同时，从地图中删掉 C—D 这条连线，而 A—B 本身是一条最短路径，不能删掉，如图 6-9 所示。

对于 E 点：A—B—D—E，长度是 6；A—B—C—E，长度是 7，共两条路径。显然，从 A 到 E 的最短路径是 A—B—D—E，同时，将 C—E 的连线删掉，如图 6-10 所示。

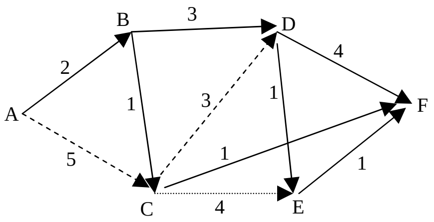

图 6-9　删掉 C—D

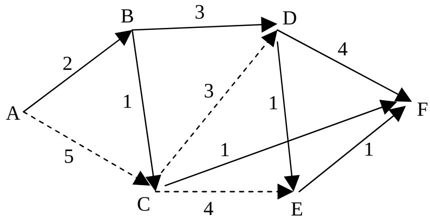

图 6-10　删掉 C—E

对于 F 点：此时我们面对的地图已经变为图 6-10。这时候，考虑的情况就变得很少了，我们只需要比较这三条路径的长度即可：A—B—D—F，长度是 9；A—B—C—F，长度是 4；A—B—D—E—F，长度是 7。显然，从 A 到 F 的最短路径是 A—B—C—F，长度是 4。

迪杰斯特拉算法和动态规划方法比较起来，前者更能够在地图中体现出来，我们只需要从距离近处出发，不断地删掉多余的连线，最后就能从地图上清晰地看到两点之间的最短路径。

6.1.4 怎样得到最短连接线路

在规划旅游线路时，我们不仅会考虑两个景点之间的最短线路，还需要从整个景区考虑，怎样才能尽可能地将所有景点游遍，这样就需要设计最短的线路将这些景点连接起来。另外，在修路、修渠道、安装管道时，也需要考虑各个地点之间的最短连接线路，也就是用尽可能少的成本将各个地点连接起来。

怎样从地图中得到各个点之间的最短连接线路呢?

图 6-11 是某个地区的居民点分布图，假设我们需要在图上的 A、B、C、D、E 和 F 六个居民点之间安装自来水管，要求自来水管必须连接到每个居民点。两点之间的连线表明这两地之间可以安装自来水管，连线上的数字表示两地之间的距离。现在已知安装自来水管的成本与管道的总长度成正比，应该采用怎样的方案，才能使自来水管的安装成本最低呢?

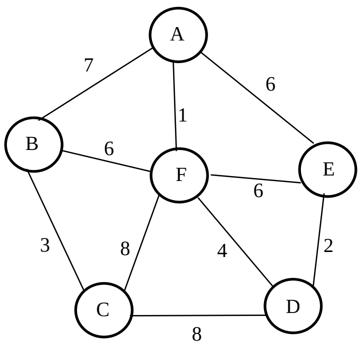

图 6-11　六个居民点之间的连线图

要使安装的自来水管总长度最短，就需要从图 6-11 中找到让各个居民点之间相连的最短连线。这时候就需要从全局考虑，不能只考虑某两点之间的最短路径。对于这种规划最短连线的问题，可以用两种方法来解决。

1. 普里姆算法

要将图 6–11 中的所有点都连接起来，我们可以从某一点着手，不妨从 A 点着手。只需要找到连接 A 点的最短连线，这条最短连线就一定是在最优方案之中的。从图 6–11 中可以看出，连接 A 点的最短连线是 A—F，它的长度是 1。此时，我们选择 A—F 作为最优方案中的一条线，那么 F 点就已经在我们的最优方案之中了。接着，再找最短的连线，这条连线要能够和 A 点或者 F 点相连。依次类推，每次都向最优方案中加入一个新的点，直到所有点都能够连接在一起。

根据上述思路，我们按照下面的步骤得到图 6–11 中的最佳连线方案。

第一步：将 A 点放入方案，从 A 点开始，如图 6–12 所示；先找和 A 点连接的最短连线，得到 A—F，如图 6–13 所示。

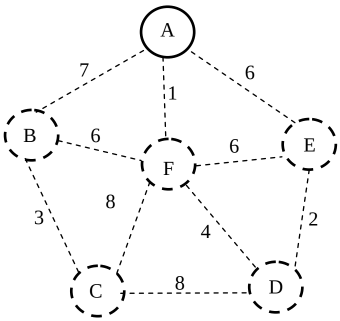

图 6–12　从 A 点开始

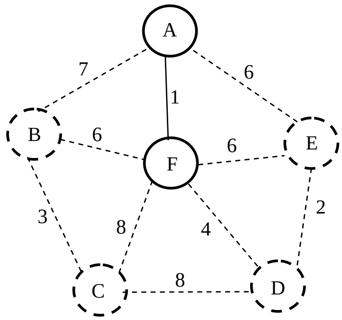

图 6–13　选择 A—F 连线

第二步：由图 6–13 可知，A 点和 F 点均在方案中，还有 B 点、C 点、D 点和 E 点不在。再从不在方案中的连线里面找最短的，使得已在方案中的 A 点或 F 点能够连接到不在方案中的点。这时候的最短连线是 F—D，长度是 4，如图 6–14 所示。因为其他连线要么比 F—D 长，如 A—B，要么和 A 点、F 点没有关系，不能使 A 点、F 点和新的点相连，如 B—C，这两种情况都是不符合最短连接方案的。

第三步：由图 6–14 可知，A 点、F 点和 D 点已经在方案中，B 点、C 点和 E 点还没在方案中。再从不在方案中的连线里找最短的，使得已经在方案中的点能够连接到不在方案中的点，得到 D—E，长度是 2，如图 6–15 所示。

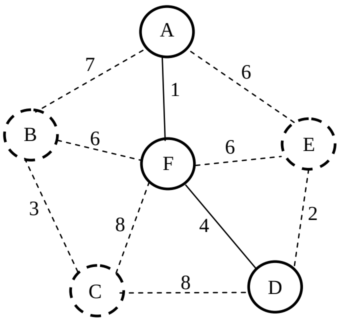

图 6–14　选择 F—D 连线

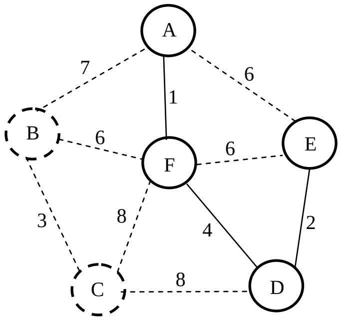

图 6–15　选择 D—E 连线

第四步：由图 6–15 可知，A 点、F 点、D 点和 E 点已经在方案中，B 点和 C 点还没在方案中。再从不在方案中的连线里找最短的，使得已经在方案中的点能够连接到不在方案中的点，得到 F—B，长度是 6，如图 6–16 所示。

第五步：由图 6–16 可知，只有 C 点还没在方案中。再从不在方案中的连线里找最短的，使得已经在方案中的点能够连接到 C 点，得到 B—C，长度是 3，如图 6–17 所示。

经过上面的五步，所有点都已经连接在一起，这时得到的就是这六个点之间的最短连接线路，也就是最佳的自来水管安装线路，如图 6–18 所示，这条线路的总长度是 16。

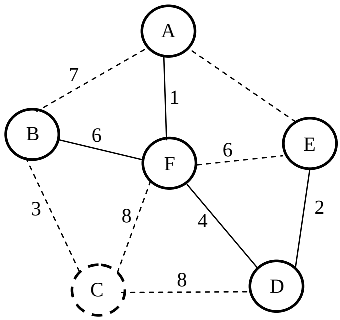

图 6-16　选择 F—B 连线

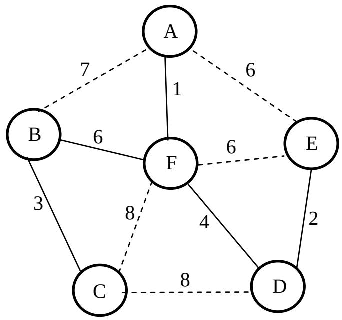

图 6-17　选择 B—C 连线

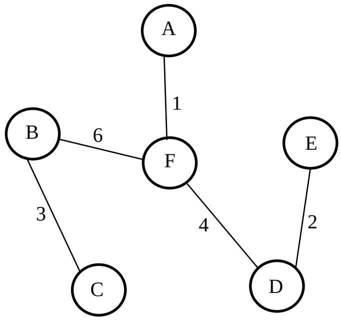

图 6-18　最佳的自来水管安装线路

2．克鲁斯卡尔算法

上面的普里姆算法是从某一点扩展得到的，依次找到能够连接新的点的最短连线，这些连线就组成了这些点之间的最短连接线路。换个角度，我们也可以将长度较短的边尽可能地放到我们所要的方案中。例如，对于图 6-11，我们可以先选择最短的一条连线 A—F 放到方案中，再从剩下的连线中选择最短的一条，也就是 D—E，放到方案之中。依次类推，接着就是 B—C，直到所有的点之间都能够连接。

但是，需要注意的是，如果两点之间已经是连通的，那么就没必要再在方案中加入这两点之间的连线了。对于图 6-11，可以通过下列步骤来得到六个点之间的最佳连线方案。

第一步：从所有连线中选择最短的那条放到方案中，得到 A—F，长度是 1，如图 6-19 所示。

第二步：根据图 6-19，再从不在方案中的连线里面选择最短的那条放到方案中，得到 D—E，长度是 2，如图 6-20 所示。

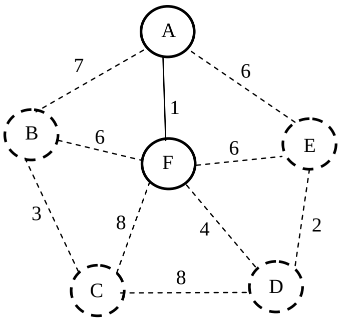

图 6-19　选择最短连线 A—F

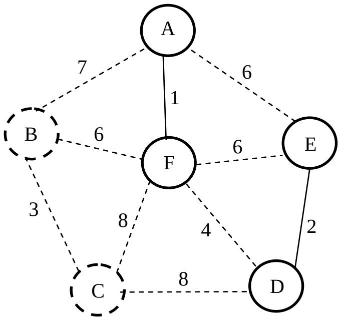

图 6-20　选择最短连线 D—E

第三步：根据图 6-20，再从不在方案中的连线里面选择最短的那条放到方案中，得到 B—C，长度是 3，如图 6-21 所示。

第四步：根据图 6-21，此时 B—C、D—E、A—F 这三条线已经放到方案中，但是彼此之间都还未连接。继续从不在方案中的连线里面选择最短的那条放到方案中，得到 F—D，这使得 A 点、F 点、D 点和 E 点连接在一起，得到图 6-22。

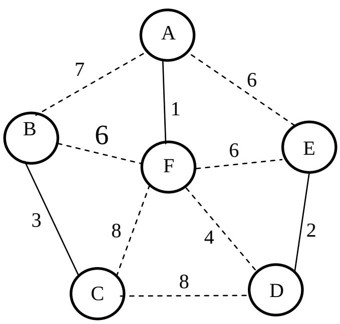

图 6-21　选择最短连线 B—C

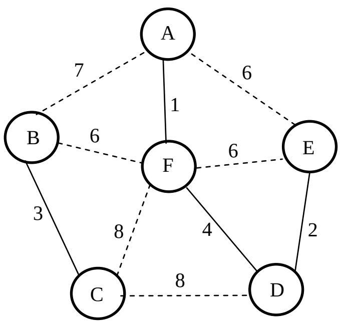

图 6-22　选择最短连线 F—D

第五步：根据图 6–22，方案中 B、C 两点还未和其余四点产生连接。继续从不在方案中的连线里面选择最短的那条连线，此时最短的是三条长度为 6 的连线：B—F、A—E、F—E。但是，由于在方案中的 A、E 和 F 这三点已经连接在一起了，就不能再选择 A—F 和 F—E 了，应该选择 B—F。此时，图中的六个点均已经连接在一起，如图 6–23 所示。

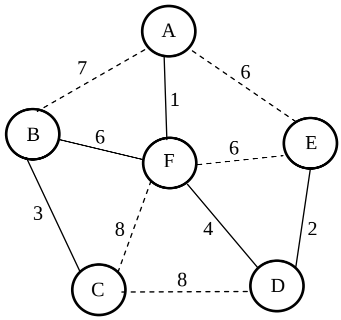

图 6–23　克鲁斯卡尔算法得到的最短连接线路

经过上面这五步，得到的各点之间的最短连接线路是图 6–23，这和普里姆算法求得的最短连接线路（见图 6–18）是一样的，这说明这两种方法只是过程不一样，得到的结果是一致的。灵活运用这两种方法，基本能够解决现实生活中需要求各点之间的最短连线这类问题。

6.2　生活中的图形问题

6.2.1　运输的最短路径

【问题】

图 6–24 是某个地区的地图，共有 A、B、C、D、E、F 六个小镇，图中的连线表示小镇之间的公路，其中，箭头表示公路的方向。连线上的

数字表示这段路的长度，单位是千米。现在，有一辆卡车需要将货物从 A 地运到 F 地，请问，选择哪条路线最短？最短路线有多长？

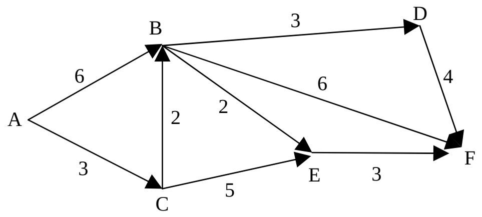

图 6-24　六个小镇的公路图

【解析】

这是一个求从 A 点到 F 点之间最短路径的题目，可以采用迪杰斯特拉算法。从 A 点开始，先找 A 点到较近的点的最短路径，再慢慢扩展，直到找到从 A 点到 F 点的最短路径。对于 B 点和 C 点，都可以由 A 点一步达到，但是到 C 点只有一条路径，而到 B 点有两条路径，因此，先考虑 C 点。

对于 C 点：从 A 点到 C 点的最短路径就是 A—C，长度是 3。

对于 B 点：有两条路径，A—B，长度是 6；A—C—B，长度是 5。显然，后者要更短些，因此从 A 点到 B 点的最短路径是 A—C—B。同时可以将 A—B 这条连线删掉，得到图 6-25。

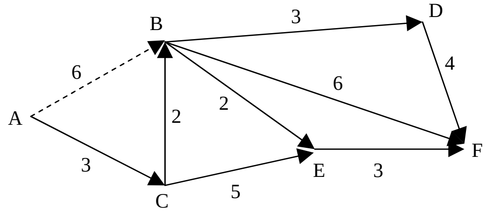

图 6-25　删掉 A—B

对于 D 点：由图 6-25 可以得到，从 A 点到 D 点的路径只有一条，就是 A—C—B—D，长度是 8。

对于 E 点：由图 6-25 可以得到，从 A 点到 E 点的路径有两条，A—C—E，长度是 8；A—C—B—E，长度是 7。显然，后者的长度更短，因此可以得到从 A 点到 E 点的最短路径是 A—C—B—E，长度是 7。同时，可以将不在最短路径之内的 C—E 这条连线删掉，得到图 6-26。

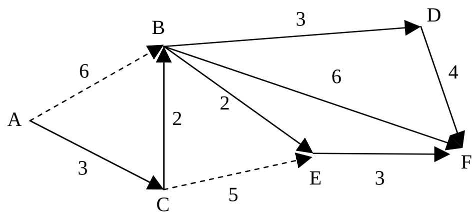

图 6-26　删掉 C—E

对于 F 点：由图 6-26 可以得到，从 A 点到 F 点共有三条路径，A—C—B—E—F，长度是 10；A—C—B—D—F，长度是 12；A—C—B—F，长度是 11。显然，第一条路径最短。因此，从 A 点到 F 点的最短路径是 A—C—B—E—F，长度是 10。

也就得到，这辆卡车的最短运输路线应该是 A—C—B—E—F，这条路线长 10 千米。

6.2.2　最少转账手续费

【问题】

在五人之间，某些人的银行账号之间可以互相转账，但是由于这些账号所在的银行不同，因此这些账号之间的转账手续费也不相同。每次转账，银行系统自动从中扣除手续费。这五人之间的转账情形可以用图 6-27 表

示，其中 A、B、C、D 和 E 这五点用来表示这五人，两点之间的连线表明这两人之间能够进行银行转账，而连线上的数字表明转账的手续费，单位是 1%。现在，A 准备给 E 转 100 元，那么，E 最多能收到多少元呢?

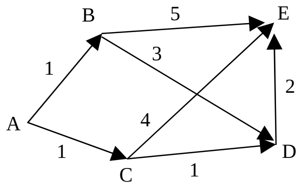

图 6–27　五人之间的转账情况

【解析】

在这个问题中，E 收到的是 100 元扣除转账手续费之后剩下的部分，当从 A 到 E 的总手续费最少时，E 收到的钱才是最多的。因此，这个问题的本质就是寻找从 A 到 E 的最短路径。同样的，利用迪杰斯特拉算法，先寻找从 A 到 E 的最短路径。

对于 B：从 A 到 B 只有 A—B 这一条路径，因此，从 A 到 B 的最短路径就是 A—B，长度是 1。

对于 C：同样的，从 A 到 C 只有一条路径 A—C，因此，A—C 就是 A 到 C 的最短路径，长度是 1。

对于 D：从 A 到 D 有两条路径，A—B—D，长度是 4；A—C—D，长度是 2。显然，后者更短，因此，A—C—D 是从 A 到 D 的最短路径，长度是 2。同时，删掉不在最短路径中的连线 B—D，得到图 6–28。

对于 E：由图 6–28 可知，只需考虑三条从 A 到 E 的路径，A—B—E，长度是 6；A—C—E，长度是 5；A—C—D—E，长度是 4。显然，最后一条长度最短。因此，从 A 到 E 的最短路径是 A—C—D—E，长度是 4。

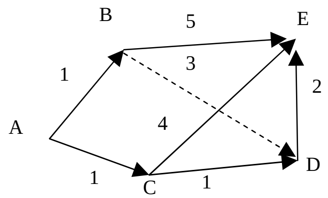

图 6-28　删掉 B—D

从上面的结论中也可以得到，从 A 到 E 的最低手续费是 4%，这时 E 收到的钱最多，是 96 元。

6.2.3　最佳换设备的时间

【背景】

一些工厂在生产过程中需要时常对设备进行更新换代。有些设备每年需要投入的维修成本都在增加，面对逐年增加的设备维修费用，一些老旧设备已经变成了工厂生产过程中的鸡肋。综合考虑设备的维修费用和设备未来几年的价格，那么，到底在何时需要考虑换设备，在未来若干年内，采用怎样的设备更换方案能让设备使用的成本最低呢?

【问题】

假设某型号的设备，每年的维修费用与设备使用年限的关系如表 6-1 所示，该设备未来每年年末的价格如表 6-2 所示。

表 6-1　某设备使用年限与每年维修费用的关系

使用年限	1	2	3	4	5
年维修费（万元）	5	6	8	11	19

表 6-2　某设备未来价格趋势表

未来（第 *X* 年年初）	1	2	3	4	5	6
价格（万元）	10	11	11	12	12	14

对照上述两张表格，可以看出，当该型号设备使用了 5 年时，每年的维修费用是 19 万元，而购买一台新设备只要 14 万元，显然，这时候还不如直接换新设备。当然，在设备使用了 4 年后，换新设备也是可以考虑的，此时一年的维修费用和新设备的价格相差无几。而在第 2 年年初，设备才使用了一年，显然，这时候考虑换设备是不明智的选择。因为新设备需要 11 万元，而第 2 年的维修费用只需要 5 万元。

对于该种型号的设备，从第 1 年年初到第 6 年年初这段时间，该如何采购设备，才能让设备的总使用成本最低呢?

【解析】

首先，用图形来描述问题。

对于每年年初这个时间点，我们可以用一个点来表示，这里有第 1 年年初、第 2 年年初 …… 第 6 年年初，共 6 个时间点，就可以用 A、B、C、D、E 和 F 来分别表示。而这些点之间的连线，连线上的数就是连线长度，可以用来表示在前一个时间点采购设备，一直使用到后一个时间点的总花费。例如，从 A 点到 B 点的连线，也就是第 1 年年初就换新设备，使用到第 2 年年初所花费的成本，显然，成本是购新设备的价格 10 万元，再加上第 1 年的维修费用 5 万元，共 15 万元，连线 A—B 的长度是 15；而从 A 点到 F 点的连线，就意味在第 1 年年初采购新设备，一直使用到第 6 年年初所花费的成本，显然，在第 1 年年初采购新设备的价格是 10 万元，而这 5 年时间的总维修费用是 5+6+8+11+19=49，即 49 万元，10+49=59，连线 A—F 的长度是 59。

我们可以发现，在上述 6 个时间点中，任意两点之间都可以连线，当然，也可以算出任意两点之间的设备使用花费，也就得到了连线的长度。例如，连线 A—C 的长度是 10+5+6=21。同样的，B—D、C—E、D—F

这三条连线的长度都是 21。计算每两点之间的长度之后，得到图 6-29。

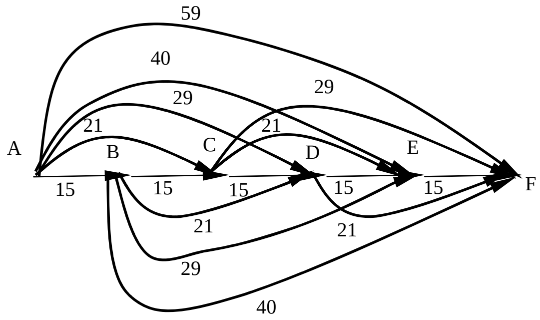

图 6-29　更换设备的时间和花费图

其次，从图形中来解决问题。

从图 6-29 中可以看出，要使从第 1 年年初到第 6 年年初的设备使用总花费最低，其实就是寻找图中从 A 到 F 的最短路径，而这条最短路径的长度就是这 5 年时间设备使用的最低花费。接下来，我们用迪杰斯特拉算法寻找从 A 到 F 的最短路径。

对于 B 点：从 A 到 B 只有一条路径，因此，可以得到从 A 到 B 的最短路径是 A—B，长度是 15。

对于 C 点：从 A 到 C 有两条路径，一条是 A—C，长度是 21，另一条是 A—B—C，长度是 30。显然，前者长度更短。因此，从 A 到 C 的最短路径就是 A—C，长度是 21。同时，可以将不在最短路径中的 B—C 删掉，得到图 6-30。

对于 D 点：根据图 6-30，从 A 到 D 只有三条路径，A—B—D，长度是 36；A—C—D，长度是 36；A—D，长度是 29。显然，最后一条路径长度最短。因此，从 A 到 D 的最短路径是 A—D，长度是 29。同时，可以将不在最短路径中的 B—D 和 C—D 删掉，得到图 6-31。

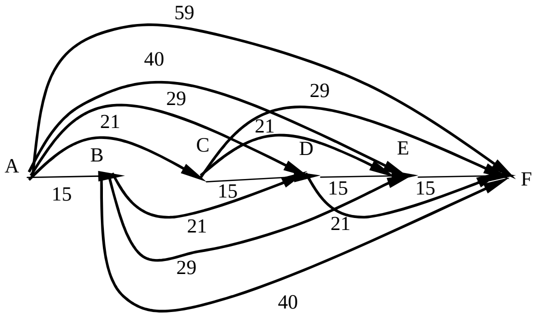

图 6-30　删掉连线 B—C

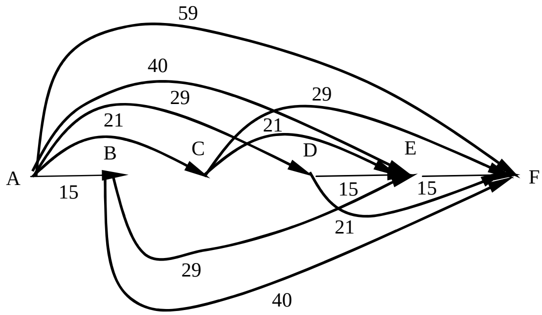

图 6-31　删掉连线 B—D 和 C—D

对于 E 点：由图 6-31 可以得到，从 A 到 E 只有四条路径，A—E，长度是 40；A—D—E，长度是 29+15=44；A—C—E，长度是 42；A—B—E，长度是 44。显然，第一条路径是最短的。因此，从 A 到 E 的最短路径是 A—E，长度是 40。同时，可以将不在最短路径中的 D—E、C—E 和 B—E 删掉，得到图 6-32。

对于 F 点：由图 6-32 可以得到，从 A 到 F 只有五条路径，A—F，长度是 59；A—E—F，长度是 55；A—D—F，长度是 50；A—C—F，长度是 50；A—B—F，长度是 55。显然，第三条路径和第四条路径长度相同，都是这五条路径中最短的。因此，从 A 到 F 的最短路径是 A—C—F 或者 A—D—F，长度是 50。

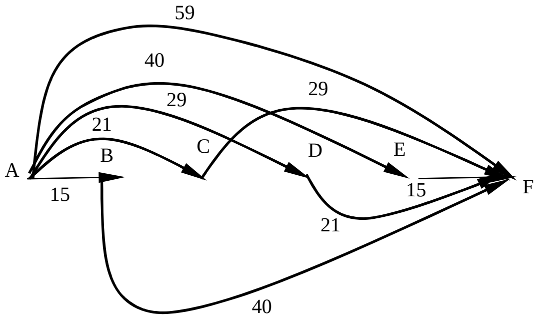

图 6-32　删掉连线 B—E、C—E 和 D—E

从上述分析中可以看出，根据得到的最短路径，也就得到最佳的更换设备的方案：在第 1 年年初买设备，然后在第 3 年年初或者第 4 年年初更换设备，这 5 年的设备总花费最少，此时花费一共是 50 万元。

6.2.4　农田灌溉问题

【问题】

某地的五块农田需要灌溉，但是，这五块并不在一处，任意两块农田之间都隔着一段距离，这些距离有远有近。现在需要挖灌溉用的渠道，要求能灌溉到每一块农田。在图 6-33 中，这五块农田分别用 A、B、C、D 和 E 表示，两点之间的连线表明这两块农田之间能够挖渠道，连线上的数字表示这两块农田之间的距离，单位是千米。那么，如何设置渠道的线路，让整个渠道的长度最短，从而使挖掘成本最低呢?

【解析】

题中给出了这个最优方案的两个条件：首先，要将五块农田用渠道相连接；其次，要使渠道的总长度尽可能小。这正是一个求各点最短连接线路的规划题。根据图 6-33，我们不妨采用普里姆算法，求得最佳的连接方案。

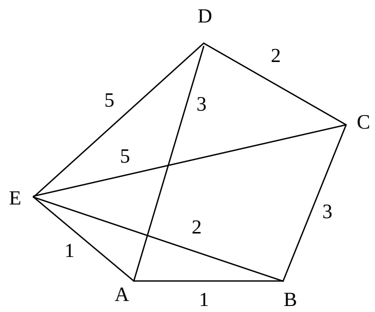

图 6-33　五块农田分布图

第一步：不妨从 A 点开始，找到连接 A 点的最短连线，得到最短连线是 A—E 和 A—B，这两条连线的长度都是 1。这时候，不妨选取其中任意一条，如 A—E，加入方案中，如图 6-34 所示。

第二步：由图 6-34 得到，此时 A 点和 E 点已经在方案中，B 点、C 点和 D 点不在方案中。再从不在方案中的连线里寻找最短的那条，使得已经在方案中的点能够和不在方案中的点相连。这样得到的最短连线是 A—B，长度是 1。因此，将 A—B 放入方案中，如图 6-35 所示。

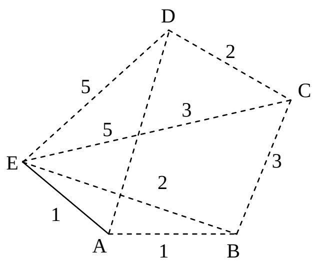

图 6-34　选择 A—E 连线

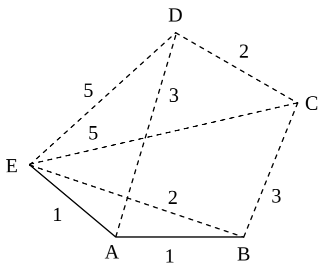

图 6-35　选择 A—B 连线

第三步：由图 6-35 得到，此时 A 点、B 点和 E 点已经在方案中，C 点和 D 点不在方案中。再从不在方案中的连线里寻找最短的那条，使得已经在方案中的点能够和不在方案中的点相连。这样得到的最短连线是 B—

C 和 A—D，两条连线的长度都是 3。任意选择其中一条即可，不妨将 A—D 放入方案中，如图 6-36 所示。注意，B 点和 E 点均在方案中，因此不能选择长度为 2 的连线 B—E。

第四步：由图 6-36 得到，此时 A 点、B 点、D 点和 E 点已经在方案中，只有 C 点还不在方案中。再从不在方案中的连线里寻找最短的那条，使得已经在方案中的点能够和不在方案中的点相连。这样得到的最短连线是 D—C，长度是 2。因此，将 D—C 放入方案中。此时五个点均已经在方案中，且都完成连接，如图 6-37 所示。

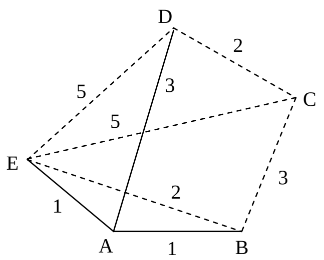

图 6-36　选择 A—D 连线

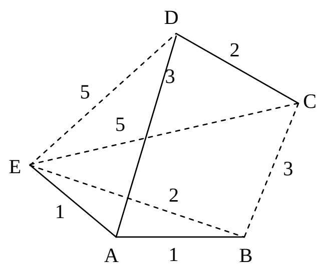

图 6-37　选择 D—C 连线

根据上述分析的结论，得到农田灌溉渠道的最佳设计连线是：连接 A 和 E、A 和 B、A 和 D、D 和 C，这时候渠道的总长度最小，长度是 7 千米。

注意，这里的最佳方案也可以是 A—E、A—B、B—C 和 C—D，这时候的总长度也是 7。从这里可以看出，在解决最短连接线路的问题时，得到的最佳方案往往不是唯一的，但是最短的长度都是相同的。

6.2.5　网线连接问题

【问题】

现在要在某五个地区之间连接网线，如图 6–38 所示，其中 A、B、C、D 和 E 分别表示这五个地区，两点之间的连线表明这两个地区间方便连接网线，而连线上面的数字表示这两个地区之间的距离，单位是千米。如何设置最佳的网线连接方案，确保每个地区都能连接网线，并且网线的总长度最小呢?

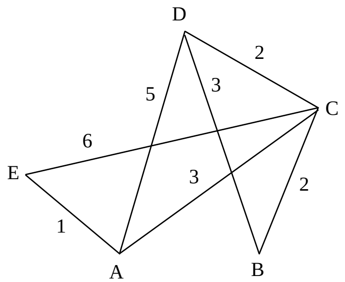

图 6–38　五个地区分布图

【解析】

要能连接到每一个地区，同时要让这个连接线路最短，这就是一个求各点的最短连接线路的问题。这里，我们用克鲁斯卡尔算法来进行分析，找到这个最佳的连接方案。

第一步：从所有的连线中选择最短的那条，即 A—E，长度是 1。将 A—E 放入方案中，得到图 6–39。

第二步：根据图 6–39，从不在方案中的连线里面选择长度最短的那条，得到 B—C 和 C—D，长度都是 2。这时候，任意选择其中一条即可。不妨选择将 B—C 放入方案中，得到图 6–40。

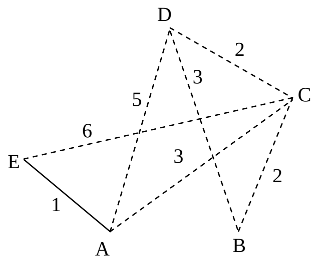

图 6-39　选择 A—E 连线

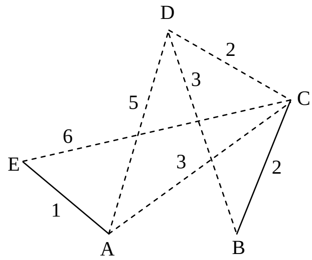

图 6-40　选择 B—C 连线

第三步：根据图 6-40，从不在方案中的连线里面选择长度最短的那条，得到 C—D，长度是 2。将连线 C—D 放入方案中，得到图 6-41。

第四步：根据图 6-41，从不在方案中的连线里面选择长度最短的那条，得到 A—C 和 B—D，两条连线的长度都是 3。但是由于方案中的 B、D 两点已经能够连接在一起，因此不能选择 B—D，而应该选择 A—C，长度是 3。将 A—C 放入方案中，得到图 6-42。这时候，五个点均已经连接在一起，图 6-42 中实线表示的连接线路就是最佳连接方案。

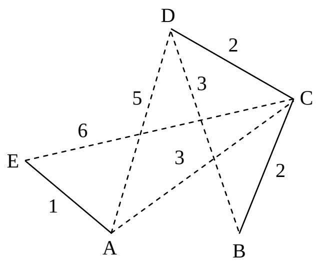

图 6-41　选择 C—D 连线

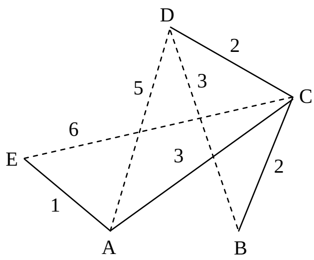

图 6-42　选择 A—C 连线

根据上述分析得到，连接 A 和 E、A 和 C、B 和 C、C 和 D，这是网线最短的连接方式，这时候的网线长度是 8 千米。

第 7 章

网络计划：制订合理的工作计划

项目，大到一个动辄数百亿元资金的建筑工程，小到一件泡茶接待客人的小事。大大小小的项目都可以利用网络计划这种方法来做出合理的规划，确保项目中各项工作的有序进行，从而充分利用时间，让项目在期限到来前顺利完成。

7.1　外行看懂网络计划

凡事预则立，不预则废。在日常生活中，制订计划对于每个人来说都是不可避免的事情。网络计划，通俗来说，就是一种计划方法。如何最大化地利用时间，高效地完成项目中所需完成的各项工作，节省时间成本，这些问题都可以通过网络计划方法来解决。

7.1.1　从泡茶中看统筹规划

对于一个项目的规划，就是我们所熟悉的统筹问题。数学家华罗庚是我国统筹规划方面的奠基人，他提出过一个著名的统筹规划问题，讲的是如何最快地泡一壶茶。这道“泡茶题”具体是这样的：

烧水泡一壶茶共需要这些工作：首先，泡茶前需要烧开水，而烧开水前需要洗水壶；其次，茶壶和茶杯都要进行清洗；最后，需要准备茶叶，才能泡茶。其中，烧开水、洗茶壶、洗茶杯、准备茶叶都是泡茶的前提。

现在已经知道这些准备工作各自的用时情况：洗水壶用时 1 分钟，烧开水用时 15 分钟，洗茶壶用时 2 分钟，洗茶杯用时 1 分钟，准备茶叶用时 1 分钟，泡茶用时 2 分钟。共有甲、乙、丙三种方法，请问哪种方法更省时间?

方法甲：首先将水壶洗干净，再烧开水，等水烧开了，紧接着洗茶壶和茶杯，再去准备茶叶，最后泡茶。

方法乙：首先将茶壶和茶杯洗干净，并且把茶叶准备好，接着再洗水壶烧开水，等水开了就泡茶。

方法丙：将水壶洗干净之后就烧开水，一边烧开水，一边把茶壶、茶杯都洗干净，再把茶叶准备好，水烧开之后就泡茶。

我们可以根据各项工作所需的时间计算出用各种方法泡一壶茶所需的总时间。

对于方法甲，花费的总时间是：1+15+2+1+1+2=22 分钟。

对于方法乙，花费的总时间是：2+1+1+1+15+2=22 分钟。

对于方法丙，洗茶壶、茶杯和准备茶叶这些工作一起只花费 4 分钟，并且这些工作都是在烧开水的 15 分钟之内完成的，因此，用这种方法泡一壶茶花费的总时间是：1+15+2=18 分钟。

综合得到，用方法丙泡茶是最省时间的，只需要 18 分钟，比前面两种方法节省了 4 分钟。从这个问题中可以看出，合理的规划和安排能够节省时间、提高效率。

事实上，洗水壶是必须在烧开水之前完成的，没有洗水壶就不能烧开水。而泡茶是最后才能完成的，没有烧开水，没有洗茶壶、茶杯，没有准备茶叶，自然也就不能泡茶了，因为这些都是泡茶的先决条件。

但是，烧开水、洗茶壶、洗茶杯和准备茶叶，这些工作之间没有严格的先后关系。要尽可能地缩短泡茶所需时间，只能从此处着手。而洗茶壶、洗茶杯和准备茶叶这三者之间虽然没有严格的先后关系，但是也不能同时

进行。然而，这三者却可以和烧开水同时进行。也就是说，洗茶壶、洗茶杯和准备茶叶共需要花费 4 分钟，但是这 4 分钟的工作完全可以在等水烧开的 15 分钟内来完成。

7.1.2　用甘特图来描述泡茶问题

上述烧水泡茶问题可以称得上一个最简单的项目计划问题。和烧水泡茶一样，在一个项目中，需要完成各种不同的工作，并且这些工作之间是有先后之别的，有的工作需要先完成，有的工作则需要以前面的工作为基础。完成不同的工作所需要的时间也各不相同，有的需要时间较长，有的在短时间内就能完成。计划一个项目，就要考虑如何在最短时间内完成这个项目中的各项工作。

在网络计划这种方法出现之前，人们是用甘特图来规划和管理一个项目的。在 20 世纪早期，人们就开始用甘特图来给项目制作计划，对项目进行管理和控制。这些甘特图的基本思想其实非常简单，就是通过图上的时间刻度和活动列表来描述项目中各项工作的活动顺序和持续时间。

在任何一幅甘特图中都有横轴和纵轴两条线，其中横轴表示时间，纵轴表示各项工作，对应的线条表示这项工作在何时开始、何时结束。通过甘特图，可以对各项工作的先后顺序进行安排，从而找到最节省时间的工作计划。将最优的工作计划在甘特图中体现出来，生动形象，易于管理项目的进展。

回到刚刚的泡茶问题，我们可以将方法丙的甘特图画出来。如何画一个计划的甘特图呢?

第一步：画出坐标轴。横轴表示时间，由于在泡茶问题中未涉及具体

的时间点，我们不妨假设这个项目在时间上是从 0 开始的，对应的横坐标也就表示第 x 分钟；纵轴上是一项项具体的工作，没有坐标，通常将先完成的工作放在前面，如图 7-1 所示。

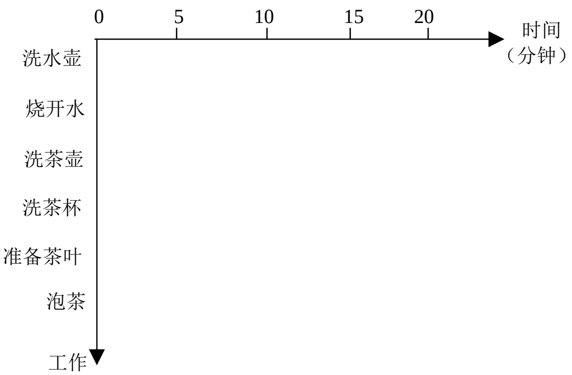

图 7-1　泡茶的甘特图坐标

第二步：按照方法丙为每项工作画线条。这里的线条是一个小长方形，其中长方形的左边对应的横坐标正好是这项工作开始的时刻，而长方形的右边对应的横坐标就是这项工作结束的时刻，如图 7-2 所示。

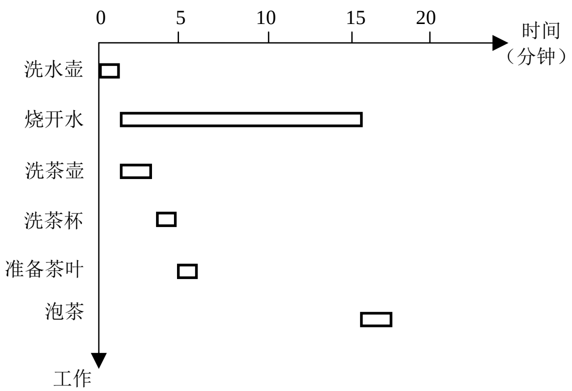

图 7-2　泡茶的甘特图（方法丙）

根据甘特图可以得到很多信息，主要有四个方面的信息。

第一，如图 7-2 所示，在甘特图中的那些小长方形的长短分别代表了这些工作用时的多少。用时越多，对应的小长方形越长，如表示烧开水的小长方形；反之，小长方形就越短，如表示洗茶杯的小长方形。

第二，在图 7-2 中，如果某个小长方形的左边在图中的位置越靠左，就表明这项工作是较早开始的，如表示洗水壶的小长方形；反之，就表明这项工作较晚才开始，如表示泡茶的小长方形。

第三，在图 7-2 中，如果某个小长方形的右边在图中的位置越靠左，就表明这项工作是较早结束的，如表示洗水壶的小长方形；反之，就表明这项工作较晚才结束，如烧开水的小长方形。

第四，在图 7-2 中，如果两个小长方形之间在时间轴上没有交集，就说明这两项工作是分先后完成的，如洗水壶和烧开水；如果两个小长方形在时间轴上有交集，就说明这两项工作在相交的那部分时间内是同时进行的，如洗茶壶、洗茶杯、准备茶叶这三项工作和烧开水。

从甘特图中可以清晰地得到项目中各项工作的先后顺序、用时等关键信息，了解到各项工作之间的依赖关系。但是，甘特图只适合比较简单的项目。

7.1.3　用网络图来描述泡茶问题

泡茶只是一个极小的项目，用甘特图来处理当然没有任何压力。但是，项目越大，所细分的各项工作就越多，这些工作彼此之间的关系也就越复杂，这时候使用甘特图来描述项目中的各项工作，甘特图就会越来越庞大。根据复杂的甘特图来控制项目的进展，就显得非常麻烦。当项目变得很复杂时，用甘特图来规划是不合适的。到了 20 世纪 50 年代，科学家发明了

一种更加有效的方法来管理一个复杂的项目，这就是网络计划。网络计划这项技术自问世以来，为各个项目节省资源的案例数不胜数，也成为运筹学中一种极其重要的规划方法。

网络计划，不再用坐标将项目中的各项工作表示出来，而是将项目中的各项工作用看得见的网络图来描述，它们之间的先后顺序和逻辑关系都可以用网络图来表示。有了网络图，我们就可以根据它来制订合适的工作计划，把握项目的进展，从而充分利用时间，保证项目在期限到来前顺利完成。

那么，如何将复杂的项目工作转化为形象的网络图呢？如何用网络图来描述项目中各项工作之间的先后顺序和逻辑关系呢？

在将项目中的各项工作用网络图来描述之前，需要用一张表格来按照大致的时间先后顺序列出项目中的各项工作，每项工作都需要在表格中得到清晰的描述，尤其需要注意的是工作名称、完成所需时间、这项工作的紧后工作。在表格中，为了简便，对于每项工作，我们都给出一个代号，通常是某个字母，除了表格中的工作名称这一列，各项工作都用这些代号表示。对于上述泡茶问题，可以得到表 7-1。

表 7-1　泡茶的工作情况表

工作名称	代号	持续时间（分钟）	紧后工作
洗水壶	A	1	B、C
烧开水	B	15	F
洗茶壶	C	2	D
洗茶杯	D	1	E
准备茶叶	E	1	F
泡茶	F	2	无

在网络图中，对于邻近的两项先后进行的工作，我们用紧前工作和紧

后工作这两个词来描述这种关系。需要注意的是，我们说的紧后工作指的是紧排在本工作之后的工作，必须满足两个条件：其一，某项工作的紧后工作必须在它完成之后才能开始，例如，烧开水就是洗水壶的紧后工作；其二，某项工作结束后，它的紧后工作是能够马上开始的，没有时间间隔，例如，泡茶虽然在洗水壶后面，但是中间至少还隔着烧开水这个环节，因此泡茶不可能是洗水壶的紧后工作。同样的，对于紧前工作也是如此，表示的是紧紧排在本工作之前的工作，例如，洗水壶就是烧开水的紧前工作，但不是泡茶的紧前工作。

另外，在泡茶问题中，洗水壶、洗茶壶、洗茶杯、准备茶叶这些工作不能同时进行，也需要安排一个先后顺序，如表 7-1 中就将洗茶壶设定为洗水壶的紧后工作。

我们如何将上述表格转化为网络图呢？制作网络图看起来简单，但其实是一件需要仔细认真、严密逻辑的技术活。网络图是按照一定的规则来制作的，我们先来熟悉网络图的绘制规则。

第一，用带箭头的连线表示某项工作。首先，在连线上方标明工作的代号，如表 7-1 中的字母。其次，连线的两端都带有一个小圆圈，用来表示这项工作的开始和结束，在完整的网络图中，在这些小圆圈中还会标明序号。最后，我们会在连线下方标明这项工作的持续时间。例如，烧开水这项工作就可以表示成图 7-3。我们把这些圆圈叫作节点，在完整的网络图中，每个节点都有一个数字序号。

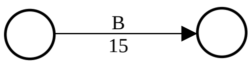

图 7-3　烧开水（代号 B，持续 15 分钟）

第二，用这些连线的连接顺序表示这些工作的先后顺序。当我们能够

表示某一项工作时，这是远远不够的，还需要考虑不同工作之间的先后逻辑关系。因此，在网络图中，不像甘特图那样用左右位置来表明先后顺序，而是用这些带箭头的连线连接顺序表示。如果某项工作在前面，其连线就在前面；反之，就在后面。依次连接的两条线，后一条连线表示的工作就是前一条连线所示工作的紧后工作。如图 7-4 所示的是烧开水和泡茶之间的先后顺序，并且泡茶是烧开水的紧后工作。

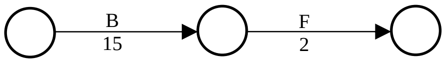

图 7-4　烧开水（代号 B）和泡茶（代号 F）的关系

第三，用交叉来表示多项工作之间的复杂关系。如果是某项工作结束之后，它的紧随工作有多项，如果多项工作的紧随工作是同一项或者多项，这时候就需要用连线之间的交叉来表示这些工作之间的关系。例如，洗完水壶，才能烧开水和做其他准备工作，这时候就可以表示成如图 7-5 所示的样子。又如，准备完茶叶和烧开水完成之后，紧接着就是泡茶，这时它们之间的关系可以用图 7-6 来表示。

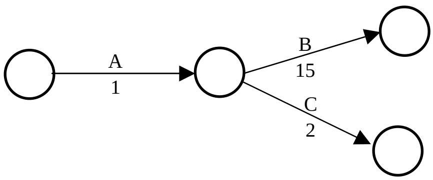

图 7-5　洗水壶、烧开水和洗茶壶的关系

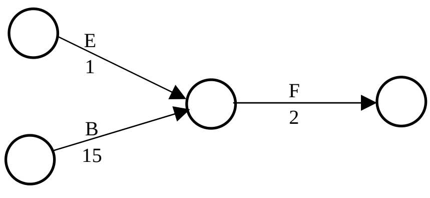

图 7-6　烧开水、准备茶叶和泡茶的关系

第四，有时要用到虚线，不表示某项工作，用来表示先后顺序。有时候，项目比较复杂，特别的，如果有 a、b 两项工作的紧后工作都是 c、d 这两项工作，那么它们之间可以表示为如图 7-7 所示的十字交叉图形。还有另外一些情况，例如，d 既是 a 的紧后工作，又是 b 的紧后工作，但 c 只是 a 的紧后工作，也就是 a、b 完成之后 d 开始，a 完成之后 c 开始，这时候就需要用到虚线，它并不表示某项具体的工作，只是表示 a 和 d 的先后顺序，如图 7-8 所示。此处将持续时间省略了。

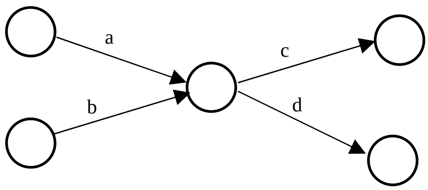

图 7-7　a、b 完成后，c、d 开始

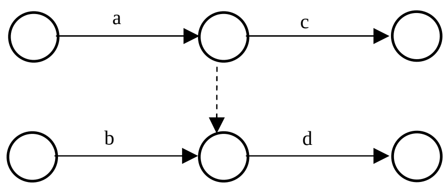

图 7-8　a、b 完成，d 开始；a 完成，c 开始

现在，我们熟悉了基本的网络图绘制规则，就可以根据表 7-1 里面各项工作的具体信息，按照各项工作的先后顺序，从左至右画出泡茶的网络图，注意有时候需要用到虚线。通常，在一个项目的网络图中，只有一个起点，也就是第一项工作的左端节点；只有一个终点，也就是最后一项工作的右端节点。另外，还需要从起点开始，按照每个节点出现的先后顺序对节点进行编号，编号从 1 开始，即起点的编号是 1。编号完成，我们才算完成这个项目的网络图，如图 7-9 所示。

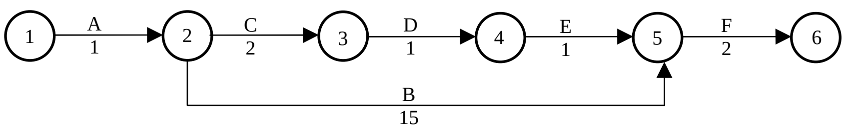

图 7-9　泡茶的网络图

清楚了上述规则之后，还需要注意的是，我们在绘制网络图时只需注意箭头方向、连线连接方式、连线上的工作代号和持续时间、连线是虚线

还是实线，而不必在乎连线是否曲直、长度是多少、形状是直线还是折线或者曲线，因为这些并不表示具体的含义。

接下来，在网络图中，还需要注意一些细节，如果不注意，就容易出现错误，从而影响项目的计划。

其一，网络图中只能有一个起点和一个终点，不能有多个起点和多个终点。因为网络图的起点表示整个项目的开始，而终点则意味着整个项目的结束。有多个起点或者多个终点就意味着网络图还未画完整。

其二，网络图中不能出现回路。我们都知道，一个项目的网络图必须有一个起点和一个终点，工作都是从起点开始，按照一定顺序执行，直到终点的，如果出现了回路，那么，在回路中执行完一项工作，就需要执行另一项工作，就会不断循环下去。如图 7-10 所示，当我们按顺序执行完 a、b、c 和 d 之后，d 的紧后工作又是 a，又要进行新的循环。出现回路，就意味着网络图中出现了严重的差错。

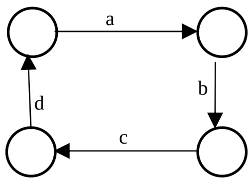

图 7-10　典型错误：出现回路

其三，网络图不能出现缺口。一个项目的计划必须是流畅无阻的，如果网络图中出现缺口，就意味着从起点开始，按照网络图来执行工作，到达不了终点，也就是说这个项目还缺少一些必要的工作。出现了缺口，同样说明网络图还没画完整。

其四，相邻两个节点之间只能有一项工作。我们知道，每项工作的前后都连接着一个节点，但是每两个节点之间也只能有一项工作，否则就无法确认在这两个节点之间应该执行哪项工作。

7.1.4　对照网络图可以灵活地管理项目

对于一个复杂的项目，在绘制好完整的网络图之后，对照网络图，可以得到许多信息。除了要明白各项工作的名称、代号、持续时间这些最基本的信息，还需要注意三方面的信息。

第一，箭头的连接顺序，无论是否交叉，始终表示项目中各项工作的先后执行顺序。

第二，起点和终点，这是整个项目开始和结束的标志。如果项目有严格的时间限制，那么，终点表明的时刻最晚不能超过项目的期限时间，起点所表示的时间同样不能早于项目的最早开始时间。例如，在图 7-9 中，如果泡茶这个项目花费 18 分钟，假设时间是从 0 开始计算的，单位是分钟，那么，其起点的时刻不能小于 0，其终点的时刻不能大于 18。

第三，平行的实线。由于虚线不表示真正的工作，当实线是平行关系时，就意味着这些工作可以同时进行，因为这些工作没有严格的先后顺序，并且相互之间不存在干扰。

明白网络图中的这些信息，就能轻松地管理整个项目。在对项目进行管理时，主要有两个方面需要注意：首先，要注意每项工作的最早开始时间和最早完成时间，以及最迟开始时间和最迟完成时间；其次，要注意整个项目中必须按时完成的关键工作。

什么是工作的最早开始时间、最早完成时间、最迟开始时间和最迟完成时间呢?

对于每个项目，我们都有严格的时间规定，但是，对于项目中的某些工作，却是比较灵活机动的，具有一定的机动时间，它们可以早点开始然后早点完成，也可以晚点开始然后晚点完成，只要这些工作没有影响到整

个项目的时间进度。每项工作的最早开始时间就是这项工作所能执行的最早时间，最早完成时间就是这项工作能够结束的最早时间。同样的，最迟开始时间就是这项工作开始执行的最晚时间，最迟结束时间就是这项工作能够结束的最晚时间。

如何计算网络图中各项工作的最早开始时间和最早结束时间?

主要方法是从前往后计算。在网络图中，我们通常假设整个项目的开始时间是 0，也就是第一项工作的开始时间是 0。接着，我们根据网络图中的箭头顺序和各项工作的持续时间，从整个项目的起点开始计算，就能迅速得到每个项目的最早开始时间，当然，也就得到每个项目的最早结束时间，因为最早结束时间等于最早开始时间加上这项工作的持续时间。

另外，每项工作的最早结束时间都会成为它的紧后工作的最早开始时间，因为它们是按照先后顺序执行的。因此，在网络图 7-9 中，对于第一项工作，也就是 A，它的最早开始时间是 0，加上它的持续时间 1 分钟，也就得到 A 的最早结束时间是 1。类似的，对于洗茶壶工作，也就是 C，最早开始时间就是 1，最早结束时间就是 3。需要注意的是，当遇到多项工作的紧后工作相同时，我们选择时间最晚的那个最早结束时间作为紧后工作的最早开始时间。例如，B 和 E 的紧后工作都是 F，B 的最早结束时间是 16，E 的最早结束时间是 5，因此，F 的最早开始时间是应该两者中较晚的那个，也就是 16，因为 F 必须等 B 和 E 都完成之后才能开始。计算图 7-9 中各项工作的最早开始时间和最早结束时间，可以得到表 7-2。

表 7-2 各项工作的最早开始时间和最早结束时间（从前往后计算）

工作名称	工作代号	紧后工作	持续时间（分钟）	最早开始时间	最早结束时间
洗水壶	A	B、C	1	0	0 + 1 = 1
烧开水	B	F	15	1	1 + 15 = 16
洗茶壶	C	D	2	1	1 + 2 = 3

续表

工作名称	工作代号	紧后工作	持续时间（分钟）	最早开始时间	最早结束时间
洗茶杯	D	E	1	3	3 + 1 = 4
准备茶叶	E	F	1	4	4 + 1 = 5
泡茶	F	–	2	16	16 + 2 = 18

从表 7–2 中可以看出，最早开始时间和最早结束时间需要尽可能地将各项工作的时间往前安排，尽可能向前看齐，可以得到图 7–11，在每项工作上方的括号中，左边数字表示这项工作的最早开始时间，右边数字表示这项工作的最早结束时间。另外，如果表示成甘特图，则将是图 7–2 所示的形式。从图 7–2 中也可以看出，各项工作的长方形都应尽可能地往左边靠。

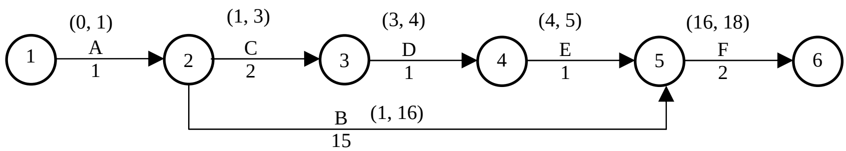

图 7–11　泡茶计划中各项工作的最早开始时间和最早结束时间

如何计算网络图中各项工作的最迟开始时间和最迟结束时间?

主要方法是从后往前计算。在网络图中，整个项目都有一个确切的结束时间，也就是这个项目的起始时间加上整个项目的持续时间。例如，在网络图 7–9 中，如果这个项目是从 0 这一时刻开始的，那么这个项目的结束时间就是 18，也就是终点所表示的时间是 18。现在，需要从后往前进行分析。显然，最后一项工作是 F，它的最迟结束时间必然是 18，在这时候，用最迟结束时间减去这项工作的持续时间 2 分钟，也就得到了 F 的最迟开始时间，应该是 16。

另外，每项工作的最迟开始时间同样是它的紧前工作的最迟结束时间，因此，可以从后往前计算，依次得到每项工作的最迟结束时间和最迟

开始时间。例如，对于准备茶叶这项工作，代号是 E，它是 F 的紧前工作，由于 F 的最迟开始时间是 16，因此，E 的最迟结束时间也是 16，再减去烧开水需要的 15 分钟，也就得到这项工作的最迟开始时间是 1。需要注意的是，当遇到多项工作的紧前工作相同时，我们选择时间最早的那个最迟开始时间作为紧前工作的最迟结束时间。例如，B 和 C 这两项工作都具有相同的紧前工作 A，B 的最迟开始时间是 1，C 的最迟开始时间是 12，因此，A 的最迟结束时间应该是两者之间较早的那个，也就是 1，因为只有在 A 结束之后，B 和 C 才能够开始。计算图 7–9 中各项工作的最迟开始时间和最迟结束时间，可以得到表 7–3。

表 7–3　各项工作的最迟结束时间和最迟开始时间（从后往前计算）

工作名称	工作代号	紧前工作	持续时间（分钟）	最迟结束时间	最迟开始时间
泡茶	F	E、B	2	18	18 − 2 = 16
准备茶叶	E	D	1	16	16 − 1 = 15
洗茶杯	D	C	1	15	15 − 1 =14
洗茶壶	C	A	2	14	14 − 2 = 12
烧开水	B	A	15	16	16 − 15 = 1
洗水壶	A	–	1	1	1 − 1 = 0

从表 7–3 中可以看出，最迟开始时间和最迟结束时间需要尽可能地将各项工作的时间往后安排，尽可能向后看齐。另外，如果表示成甘特图，则将是如图 7–12 所示的形式。从图 7–12 中也可以看出，各项工作的长方形都应尽可能地往右边靠。

综合前面计算得到的各项工作的最早（迟）开始时间和最早（迟）结束时间，可以得到图 7–13。在每项工作上方的第一个括号中，左边数字表示这项工作的最早开始时间，右边数字表示这项工作的最早结束时间；在第二个括号中，左边数字表示这项工作的最迟开始时间，右边数字表示这项工作的最迟结束时间。

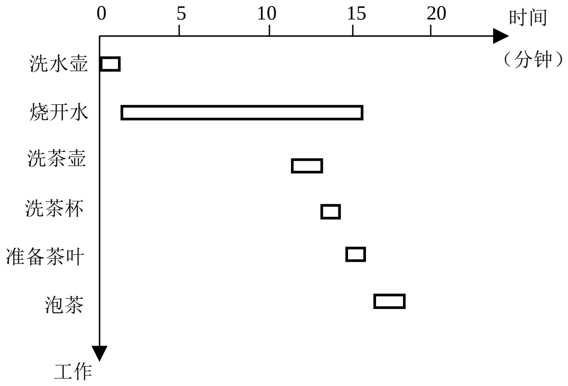

图 7-12 泡茶的甘特图（最迟开始时间和最迟结束时间）

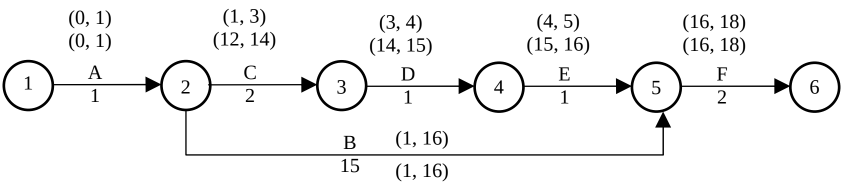

图 7-13 各项工作的最早（迟）开始时间和最早（迟）结束时间

此外，还需要注意什么是工作的机动时间和工作总时差。

在从两个角度得到各项工作的开始时间和结束时间之后，根据这些条件，我们能够很清楚地知道每项工作是否能够机动，并且可以计算出它的机动时间。有的工作并不需要一定在某个时刻开始执行、一定在某个时刻结束，在不耽误整个项目进度的前提下，这个可以自由变动的时间范围就是这项工作的机动时间，机动时间就等于这项工作的最迟开始时间减去最早开始时间，或者最迟结束时间减去最早结束时间。例如，从图 7-13 中可以得到，C、D 和 E 的机动时间都是 11 分钟。

某些工作的总时差就是这些工作所共有的机动时间。例如，C、D 和 E 这三项工作的总时差就是 11 分钟，如果 B 占用了 7 分钟的机动时间，那么 D 和 E 就只剩下 4 分钟的机动时间了。

那么，哪些工作是关键工作?

在一张网络图中，总有一些工作并没有机动时间，必须严格地按时开始、按时结束。这些工作就是我们需要注意的关键工作。通常，在一个项目中，如果关键工作出现了一时的暂停或者延后等问题，那么，这个项目就不可能按时完成，整个项目都需要延后。而对于某些具有机动时间的项目来说，即使出现暂停或者延后，但是只要在机动时间内，就不会对整个项目的进展产生影响。

因此，根据图 7-13，可以清楚地看到工作 A、B 和 F 的机动时间都是 0，因此，这些工作都是泡茶这个项目中的关键工作。那么，只有这些工作都能够严格地按时执行，最后才能保证整个泡茶项目在时间为 18 的时候结束。在一个项目中，关键工作需要重点照顾，优先分配时间和资源。这些关键工作组成的工作路线叫作关键路线，例如，在图 7-13 中，A—B—F 就是一条关键路线。通过网络图求得一个项目的关键路线，在项目管理中非常重要。

其实，关键路线本质上就是网络图中从起点到终点的最长路径，比较简单的网络图也可以通过直接观察来寻找网络图中从起点到终点的这条最长路径，这就是这个项目中的关键路线。

比较甘特图和网络图，就可以发现网络图比甘特图更加简洁、方便，各项工作之间的逻辑关系更加清晰，同时还可以比较方便地计算各项工作的机动时间，从而能够发现项目中的关键工作，得到项目的关键路线，帮助我们管理整个项目。

7.2　生活中的网络计划

7.2.1　翻新房间中的流水作业

【背景】

事实上，大多数项目都需要分工合作来完成，但是，如何分工却不是一件可以随意安排的事，因为可以使用的工具或者其他资源是非常有限的，安排不当就会造成有的人没事干，而有的人又总干事的局面，让人力资源被白白浪费，让整体的工作效率大打折扣，从而拖慢了整个项目的进度。这时候就需要用到流水作业的思想，同样可以用甘特图和网络图描述出来。例如，如何安排工人翻新房间就是一个典型的需要流水作业的问题。

【问题】

某个破旧房间的四面墙壁需要进行翻新。对于一面墙壁，首先，需要用刮板将墙壁上的那层旧漆刮掉；接着，在刮掉旧漆的墙面上用刷子刷上一层新漆；最后，需要用小刮刀将溅在地面上的油漆清理干净。经过这三步，才算完成这面墙壁的翻新过程。现在共有 15 个工人参与这项工作，但是翻新房间需要用到的工具非常有限，只有 5 个用来刮旧漆的刮板，5 把刷漆用的刷子，5 把可以清除地上油漆的小刀，每个工人同时只能使用一件工具。

需要翻新的这四面墙壁，各自的长度也不相同，其中第一面墙壁和第三面墙壁的长度都是第二面墙壁与第四面墙壁的两倍，因此，第一面墙壁和第三面墙壁每道工序所需的时间是第二面墙壁和第三面墙壁的两倍；并且同一面墙壁每道工序所用的时间也不相同，刷漆最费时间，清理地上的油漆最省时。如果同时有 5 个工人用刮板来刮墙壁上的旧漆，则需要 2 小时才能刮完第二面或第四面墙壁，需要 4 小时才能刮完第一面或第三面墙

壁；如果同时有 5 个工人用刷子来给去掉旧漆的墙壁刷漆，则需要 3 小时才能刷完第二面或第四面墙壁,需要 6 小时才能刷完第一面或第三面墙壁；如果同时有 5 个工人用小刀来清理地上的油漆，则需要 1 小时才能将靠近第二面或第四面墙壁的地面上的油漆清理干净，需要 2 小时才能将靠近第一面或第三面墙壁的地面上的油漆清理干净。

那么，应该怎样安排工人，才能让翻新工作最快完成呢?

【解析】

这是一个计划安排类问题，可以利用甘特图和网络图来解决。

第一种方法：严格按照顺序来翻新房间。

在上述这个翻新房间的项目中，如果我们按部就班地先将第一面墙壁完全翻新之后，再翻新第二面墙壁，然后继续翻新第三面和第四面墙壁，就会发现，当 5 个工人在拿刮板刮掉第一面墙壁的旧漆时，其他 10 个工人都是闲着的，因为第一面墙壁必须要刮完旧漆才能刷上新漆；同样的，在粉刷墙壁和清理地面的时候，也会有 10 个工人是闲着的。这就相当于只有 5 个工人在干活，其他 10 个人一点活也没干，这就造成了人力资源的极大浪费。

第二种方法：采用流水作业法来翻新房间。

为了提高效率，不能按部就班地进行翻新工作，而应该尽可能地让所有人都有活可干，并且能够早点开始，不用等待太久，多余的等待时间就是资源的浪费。这时候就需要用到流水作业的思想。根据题干的信息，可以将 5 个工人同时作业的情况下，各道工序所要用的时间总结成表 7–4。首先，我们需要考虑如何才能最快地刮完一面墙壁的旧漆，好让这一面墙壁刷漆的工序和另一面墙壁刮旧漆的工序能够同时进行，也就让剩下的人也能有活可干，从而提高这个项目的进度。

表 7-4　5 个工人同时作业，每道工序所要用的时间（单位：小时）

墙壁	刮旧漆	刷漆	清理
第一面或第三面	4	6	2
第二面或第四面	2	3	1

由于工具有限，最多只能 5 个工人进行同一道工序，不妨先让 5 个工人把第二面墙壁上的旧漆刮干净，这时能最快地将一面墙壁的旧漆刮完，共用时 2 小时。接着再让这 5 个工人去刮第四面墙壁，并且安排 5 个工人拿着刷子给第二面墙壁刷油漆，这时就有 10 个工人在同时工作了。进一步，由于刮第四面墙壁的旧漆用时只要 2 小时，而给第一面墙壁刷漆需要 3 小时，因此，过了 2 小时，第四面墙壁的旧漆便能够清除干净，这 5 个刮旧漆的工人可以转向第一面墙壁开始刮漆。又过了 1 小时，第二面墙壁已经刷漆完毕，这 5 个工人便可转向第四面墙壁开始刷漆，这时候剩下的 5 个工人就可以拿起小刀将靠近第二面墙壁的地面上的油漆清理干净。这时所有人都在干活，整个项目保持高效运转。

依照上面的分工流程类推，就可以得到完整的分工计划。从全局来看，刮旧漆的工序一直在持续着，共持续了 2+2+4+4=12 小时；在刷完第二面墙壁之后，也就是 2 小时之后，刷漆的工序也在持续着，共持续了 3+3+6+6=18 小时，结束时间在第 20 小时。

但是，对于清理工序，需要在刮旧漆和刷漆完成之后才能进行，共需要 1+1+2+2=6 小时，其中第二面墙壁清理工作的开始在第二面墙壁刷完漆之后开始，也就是在第 5 小时开始，第 6 小时结束；接着，第四面墙壁刷完油漆是 2+3+3=8，也就是第 8 小时，因此第四面墙壁的清理工作在第 8 小时开始，第 9 小时结束；第一面墙壁刷完油漆是 8+6=14，也就是第 14 小时，因此第一面墙壁的清理工作在第 14 小时开始，第 16 小时结束；第三面墙壁的清理工作在第 20 小时开始，第 22 小时结束。此时所有

的工序都已经完成，也就得到翻新这个房间所用的总时间是 22 小时。

综上，整个流程可以用甘特图来表示，如图 7-14 所示。

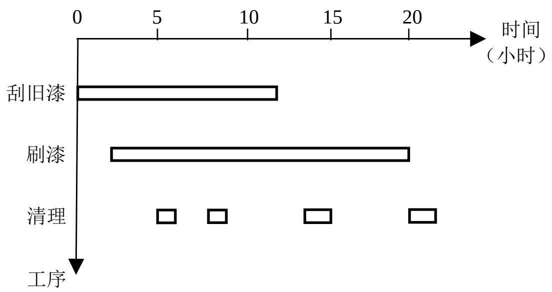

图 7-14　翻新房间的甘特图

在这个项目中，同样可以用网络图来表示。先将每面墙壁的刮旧漆、刷漆和清理工作分开，这样就能得到 12 道工序；接着再考虑这 12 道工序在逻辑上的先后顺序，这里不仅要注意同一面墙壁上三道工序的先后顺序，还需要考虑到工具是有限的，也就是需要考虑不同墙壁同种工序之间的先后顺序。总之，可以得到如表 7-5 所示的各道工序的流程表。

表 7-5　各道工序的流程表

工序	代号	持续时间（小时）	紧后工作
第二面墙壁刮旧漆	A	2	B、D
第二面墙壁刷漆	B	3	E、C
第二面墙壁清理	C	1	F
第四面墙壁刮旧漆	D	2	E、G
第四面墙壁刷漆	E	3	F、H
第四面墙壁清理	F	1	I
第一面墙壁刮旧漆	G	4	H、J
第一面墙壁刷漆	H	6	I、K
第一面墙壁清理	I	2	L
第三面墙壁刮旧漆	J	4	K

续表

工序	代号	持续时间（小时）	紧后工作
第三面墙壁刷漆	K	6	L
第三面墙壁清理	L	2	–

上面这张流程表可以表示为如图 7–15 所示的网络图，其中需要用到虚线来连接，并且注意在节点中标明序号。例如，在图 7–15 中，序号 3 和序号 4 之间的虚线就只表示工序 D（第四面墙壁刮旧漆）和工序 E（第四面墙壁刷漆）的先后顺序；同样的，序号 8 和序号 9 之间的虚线就用来表示工序 H（第一面墙壁刷漆）和工序 I（第一面墙壁清理地面）的先后顺序。这些虚线并不表示某道具体的工序。

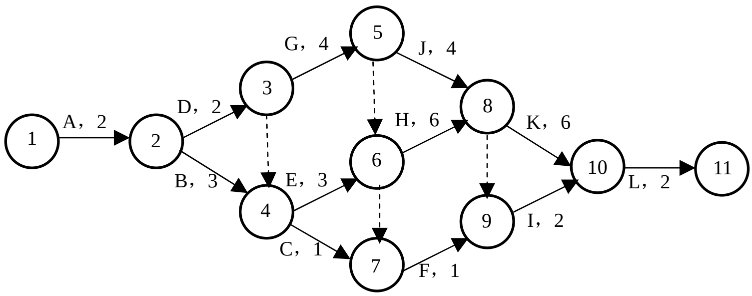

图 7–15　翻新房间的网络图

从图 7–15 中也可以看出，A—B—E—H—K—L 就是这幅网络图中的关键路线，这条关键路线的总长度是 22，也就说明翻新房间这个项目从开始到结束共需要 22 小时。

7.2.2　建筑工程的工序网络图

【背景】

一栋建筑的完成并不是一件简单的事，而是一个比较复杂的项目，里

面包含各种大大小小的工序。因此，在建筑工程中，就需要用网络图来描述具体的施工计划，标明各工序之间的先后顺序。对于非常复杂的网络图，还需要寻找到其中的关键路线，以便我们能够准确把握施工进度，确保这个建筑项目能够顺畅地完成。

【问题】

现在有某个建筑施工项目的工序表，如表 7–6 所示，其中包含工序名称、工序代号、持续时间和紧前工作。请根据这些条件绘制这个项目的网络图，并且找到它的关键路线，确认完成整个项目所需的时间。

表 7–6　建筑工程的工序情况表

工序名称	工序代号	持续时间（天）	紧前工作
设计	A	8	–
挖地基	B	20	A
打地基	C	10	B
主体工程	D	60	C
上顶	E	13	D
电路安装	F	15	D
管道安装	G	20	D
室内装潢	H	30	E、F、G

【解析】

在绘制一个项目的网络图时，一般都是根据各道工序的紧后工作，从起点开始绘制，直到整个项目的终点。而在表 7–6 中，只给出了各道工序的紧前工作，因此，我们可以根据表 7–6 中的信息得到各道工序的紧后工作：工序 A 的紧后工作是 B，工序 B 的紧后工作是 C，工序 C 的紧后工作是 D，工序 D 的紧后工作是 E、F 和 G，工序 E、F 和 G 的紧后工作是 H，工序 H 没有紧后工作。

根据上述这些条件，就可以得到这个建筑工程的网络图，如图 7-16 所示。需要注意的是，该网络图中要用到虚线来表示各道工序的先后顺序，如序号 6 和序号 7 之间的虚线表示工序 E（上顶）的紧后工作是 H（室内装潢），同样的，序号 7 和序号 8 之间的虚线表示工序 G（管道安装）的紧后工作也是 H（室内装潢）。

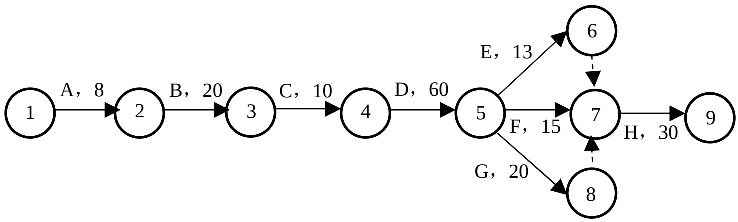

图 7-16　建筑施工项目的网络图

接下来寻找网络图 7-16 的关键路线，也就是整个建筑施工项目从起点（序号 1）到终点（序号 9）的最长路径，其中虚线仅仅起到连接作用。可以发现，从序号 1 到序号 9 的最长路径是 A—B—C—D—G—H，这就是这幅网络图中的关键路线，长度是 8+20+10+60+20+30=148，也就得到，整个施工项目需要持续 148 天。

第 8 章

纳什均衡：博弈中的最佳策略

纳什均衡是运筹学中关于博弈的一个重要理论。纳什均衡并没有什么高深之处，在我们的日常生活中，在许多博弈中，人们都是为了自己的利益，尽可能采取对自己有利的策略，最后，博弈的双方可能达成一种纳什均衡。纳什均衡可以解释经济社会和人际交往中的许多现象。

8.1　外行看懂纳什均衡

纳什均衡是双方的策略组合。当双方策略形成纳什均衡时，任何一个人改变自己的决策都得不到好处。由于博弈分为静态博弈和动态博弈，本节除了讲述纳什均衡的基本思想，还将介绍在静态博弈中寻找纳什均衡的基本方法。之后的章节再进一步讲解静态博弈和动态博弈。

8.1.1　从“囚徒困境”说起

在博弈过程中，有一个流传最广的经典问题叫作“囚徒困境”。“囚徒困境”的模型不仅仅在运筹学、博弈论中非常重要，而且广泛应用于经济学、社会学等领域。“囚徒困境”的模型如下：

假如两个同伙抢劫犯甲、乙各自被抓，并且分别被关在两间不同的监狱中，两个人无法进行任何信息交流。警察对甲和乙隔离审讯，并且给出了相同的条件：如果两人都保持沉默，则两人皆被判刑 5 年；若一人沉默，另一人揭发他，则沉默者被判刑 20 年，而揭发者无罪释放；若两人互相揭发对方，则两人都被判刑 10 年。你觉得这两个囚犯会怎么做?

首先，我们来分析这个模型的场景，即进行博弈，做出决策的场景。主要有以下四点需要明晰：

第一，对于两个囚犯而言，他们无法进行信息交换，完全不知道对方会做出怎样的决策，更谈不上什么合作了。因此，这对于甲、乙双方来说，是一场非合作博弈，不存在信任与合作的基础。

第二，警察给出的条件对这两个囚犯都极具诱惑性，在最有利的情形下能够无罪释放，显然，这样的诱惑足以让他们当中的每一个人都心动不已。

第三，两个囚犯都只考虑自己的利益，不会顾及伙伴的利益，这也是所有非合作博弈中博弈双方的基本立场。通俗地说，每个人在博弈中都是自私自利的，是没有任何道德负担的。

第四，两个囚犯是能够根据理性做出决策的，即两人都是完全自主决策的理性的人，也就是经济学中常使用的假设性前提，每个人都是“理性人”。通俗地说，博弈的双方都是很精明的，不会做出让自己吃亏的决定。

我们可以将甲和乙可以选择的策略和对应的刑期列成表 8-1。其中，第一行表示乙所能选择的策略，第一列表示甲所能选择的策略，中间的数字表示双方在该策略组合下各自的刑期。在表示双方刑期的每一格中，逗号左边的数字表示甲所要判的刑期，逗号右边的数字表示乙所要判的刑期。

表 8-1　囚徒困境策略和收益表

乙 / 甲	沉　默	揭　发
沉　默	5, 5	20, 0
揭　发	0, 20	10, 10

现在，你知道甲和乙这两个囚犯会做出怎样的决策吗？根据表 8-1，再来分析甲和乙在这场博弈过程中会出现的心理活动。

对于甲，他会这样想：如果乙选择沉默，而我选择揭发，那么我会被无罪释放，而我选择沉默就会获得 5 年的刑期，因此，这种情形下我的最

佳策略是揭发乙，如表 8-1 里(0, 20)中的 0；.如果乙选择揭发，而我也选择揭发，那么我就会被判 10 年，而我选择沉默就会获得长达 20 年的刑期，比 10 年的刑期还要久，因此，这种情形下我的最佳策略仍然是揭发乙，如表 8-1 里(10, 10)中左边的 10。因此，虽然我不知道对方会怎么做，但是只要我选择揭发乙，就一定能够取得相对较好的结果。

对于乙，乙同样是一个很精明的人，他肯定能够像甲一样进行权衡。在无法知道甲的决策这个前提下，乙也会考虑每种情形下什么样的决策对自己最有利。因此，乙也会发现，无论甲采取怎样的策略，揭发甲总比保持沉默要划算，乙最后的选择也会是揭发甲，如表 8-1 里(20, 0)中的 0和(10, 10)中右边的 10。

从甲和乙的心理活动中可以看出，无论对方做出哪个决策，甲和乙都会从理性出发，做出自己的最佳决策，即揭发对方，如表 8-1 中的(10, 10)，最后双方都要承受 10 年刑期。从表 8-1 中也可以看出，对于甲、乙双方来说，他们这样的选择都确保了自己不会“被对方坑”，无论在什么情形下，自己的结果至少不会比对方差，甚至有些时候还能得到理想的结果，例如，当对方选择沉默时，揭发对方就能无罪释放。

在整个博弈过程中，你所想的，对方也能够考虑到，渐渐地，博弈中可能出现的多种结果就会经过双方不断筛选，最终只变成一种结果，那就是甲、乙都选择揭发，各自被判 10 年。显然，这个结果是在整个博弈过程中最后稳定下来的，这就达到了非合作博弈中的纳什均衡状态。也就是说，在“囚徒困境”模型中，纳什均衡是甲、乙双方都选择揭发。

看似情况复杂的博弈过程，到最后却因为不对称的信息和人自私自利的本性，双方都会不约而同地揭发对方，这对他们各自来说，都是最佳的对策，并且双方都会坚持自己的最佳对策，从而达到一种稳定的平衡状态。这就是纳什均衡的基本思想。

为什么说达到纳什均衡后，双方的决策是稳定的，不会轻易改变呢？因为改变策略会让自己的利益受到进一步的损伤。还从“囚徒困境”来看，对于甲来说，一旦决定选择揭发对方，如果再改变自己的决策，那么他不得不考虑可能出现的对自己最不利的情形，即对方揭发自己，而自己却保持沉默，这时候他要被判 20 年。显然，这个担忧使得甲会坚持自己得到的最优决策，即揭发对方，这样即使在不利情形下，也只被判 10 年。

8.1.2 用纳什均衡解释“婆媳之争”

分析一个博弈过程，选择博弈中的最佳策略，都需要找到博弈中的纳什均衡，纳什均衡往往体现了一个博弈过程的本质。在不同的博弈中，纳什均衡也会不同，例如，在有的博弈过程中只有一个纳什均衡，有的则可能出现两个；还有，在动态博弈和静态博弈中，求解纳什均衡的方法是有很大差别的。因此，我们接下来将通过“婆媳之争”这个问题来介绍如何寻找静态博弈中的纳什均衡，这是学习运筹学中博弈决策的第一步。

婆媳关系是家庭中非常重要的一种关系。在媳妇刚娶进门时，婆婆和媳妇之间都还没有进行深入的沟通和了解，由于双方在生活习惯、性格脾气和家庭文化背景等方面都存在较大的差异，她们之间的生活观念和处理事情的方式方法也会截然不同，这时候就容易发生大大小小的冲突。婆媳之间的这种冲突就可以看作一种静态博弈，在这场博弈中，无论是婆婆还是媳妇，都不知道对方的底细和对方会采用怎样的策略。

现在，我们假设在“婆媳之争”这场博弈中，婆婆和媳妇采取的策略要么是斗争，要么是忍让。当两人都选择斗争时，她们各自的收益是−2，也就是双方都会受到损失；当两人都选择忍让时，她们各自的收益是−1，

忍让也会让自己受到一点损失；当一人选择斗争，另一人选择忍让时，选择忍让的一方的收益将会是−3，而选择斗争的一方就会获得 2 个单位的收益。那么，这个博弈过程中的纳什均衡是什么呢?

第一步：列策略和收益表。通过上述描述，可以将媳妇和婆婆可以选择的策略和收益列成表 8−2。其中，表格第一行的第一格表示参与博弈的双方，即婆婆和媳妇。除第一格以外，表格第一行表示婆婆可以选择的策略，第一列表示媳妇可以选择的策略，剩下的表示博弈双方在某个策略组合下的收益。例如，第二行第二列就表示双方都选择斗争这个策略，最后的收益是(−2，−2)。在表示收益的格子中，逗号左边表示媳妇的收益，逗号右边表示婆婆的收益。

表 8−2　婆媳之争策略和收益表

婆婆 / 媳妇	斗　争	忍　让
斗　争	−2, −2	2, −3
忍　让	−3, 2	−1, −1

第二步：在表格中标记博弈参与者 1（媳妇）在各种情形下的最佳策略。在表 8−2 中，对于媳妇来说，如果婆婆选择的策略是斗争，那么这时媳妇选择斗争的收益是−2，选择忍让的收益是−3，显然，媳妇的最佳策略是选择斗争，用下画线标记表中(−2，−2)中媳妇的收益，也就是逗号左边的−2；如果婆婆选择的策略是忍让，那么这时媳妇选择斗争的收益是 2，选择忍让的收益是−1，显然，媳妇的最佳策略是选择斗争，用下画线标记表中(2, −3)中媳妇的收益，也就是逗号左边的 2。经过这两次标记，可以找到媳妇在各个情形下的最佳策略，得到表 8−3。

表 8-3　标记参与者 1（媳妇）的最佳策略

婆　婆 媳　妇	斗　争	忍　让
斗　争	$\underline{-2}$, −2	$\underline{2}$, −3
忍　让	−3, 2	−1, −1

第三步：在表格中标记博弈参与者 2（婆婆）在各种情形下的最佳策略。在表 8-3 中，对于婆婆来说，如果媳妇选择的策略是斗争，那么这时婆婆选择斗争的收益是−2，选择忍让的收益是−3，显然，婆婆的最佳策略是选择斗争，用下画线标记表中(−2, −2)中婆婆的收益，也就是逗号右边的−2；如果媳妇选择的策略是忍让，那么这时婆婆选择斗争的收益是 2，选择忍让的收益是−1，显然，婆婆的最佳策略是选择斗争，用下画线标记表中(−3, 2)中婆婆的收益，也就是逗号右边的 2。经过这两次标记，可以找到婆婆在各个情形下的最佳策略，得到表 8-4。

表 8-4　继续标记参与者 2（婆婆）的最佳策略

婆　婆 媳　妇	斗　争	忍　让
斗　争	$\underline{-2}$, $\underline{-2}$	$\underline{2}$, −3
忍　让	−3, $\underline{2}$	−1, −1

第四步：在表格中寻找均被标记的策略组合。在表 8-4 中，可以看出逗号左右边均被下画线标记的是(−2, −2)，这时的策略组合是媳妇和婆婆都选择斗争。这个策略组合就是这个博弈过程中的纳什均衡。需要注意的是，在有的博弈过程中，得到的纳什均衡有多个，在后面的章节中就会遇到。

总之，经过上述四步，就能找到一场静态博弈中的纳什均衡。在寻找纳什均衡的过程中，最重要的是从单独的角度考虑收益，分别考虑博弈双方各自的最佳策略，无须关注整体是否最优。因为纳什均衡有可能是整体最优，也有可能不是整体最优，如囚徒困境和婆媳之争。

8.1.3　纳什均衡不一定对整体有利

从上面的“囚徒困境”中可以看出，甲、乙双方进行非合作博弈，各自做出最优决策之后，得到的最终结果是双方都会选择揭发对方，从而让每个人都要面临 10 年的刑期，加起来就是 20 年的刑期。显然，这对于这两人的整体来说，并不是最优的决策组合。从表 8-1 中可以看出，甲、乙双方最优的决策组合应该是都保持沉默，这样，每个人只要承受 5 年的刑期，加起来承受 10 年即可。

为什么纳什均衡不一定是整体最优?

因为在非合作博弈中，博弈的双方无法知道对方具体的决策信息，双方无法通过彼此协商选择一个对整体最有利的决策组合。正是在这种非合作的情形下，人们自私自利的本性被充分暴露，在利益的驱动下，每个人不得不考虑对方做的决策可能对自己不利，每个人在损害对方利益和坚持自己利益这两个选择中都会毫不犹豫地选择后者。因此，每个人在博弈过程中不可能从整体的角度来做出决策，因为那样做并不能确保对自己有好处，反而还有更大的风险让自己陷入更不利的局面。例如，在“囚徒困境”中，即使一方从整体利益出发，保持沉默，他将面临被另一方揭发的极大风险。

在现实生活中，人与人之间不可能是完全信任、互相坦诚的合作状态，绝大多数时候往往是彼此防备、争夺利益。在这样的环境下，使得现实生活中的博弈大多数是非合作博弈，只有极少数是双方相互信任、相互合作的博弈。因此，纳什均衡给我们揭示了一种有趣的现象：在大多数博弈过程中，即便参与博弈的双方都绞尽脑汁做出了对自己最有利的决策，他们最后得到的结果也不一定是对每一方最优的，甚至可能出现“两败俱伤”的结局。

总之，纳什均衡是博弈中，双方在不信任、无法合作的基础上，只考虑自己的利益而做出的最佳决策，形成的稳定的决策组合。也可以说这个决策组合是在这场博弈中的一个纳什均衡。

8.1.4 纳什均衡的启发

了解纳什均衡之后，可能很多人会认为，既然双方的决策处于纳什均衡时未必对整体最有利，也可能不是某一方心中的理想结果，那么，了解纳什均衡对于我们在非合作博弈中有哪些帮助呢?

纳什均衡主要能够从四个方面给我们提供参考。

第一，在博弈中纳什均衡出现的概率是很高的。因为纳什均衡基于每个人都为自己做出理性决策，在现实生活中，在利益的博弈过程中，每个人都是极其精明的，这时候很容易出现纳什均衡的稳定状态。因此，了解纳什均衡，能够帮助我们在博弈过程中及早预判极有可能出现的结果。但是，在现实生活中，在很多博弈过程中也有许多非理性因素的存在，因此，出现纳什均衡只能是一个较高概率的事件。

第二，在博弈过程中选用纳什均衡中的策略，能够帮你掌握主动权。如果采用纳什均衡中的策略，那么我们将不用被动地依赖对方的决策。因为无论对方做出哪种决策，都在我们的掌握之中。

第三，在博弈过程中选用纳什均衡的策略，不会出现对你来说最坏的结果。纳什均衡的意义可能与我们在一般规划决策时所得到的最优解有所不同。采用纳什均衡中的策略，并不一定会出现理想中的最有利的局面，也不一定对整体最优。但是，它排除了出现最坏结果的可能。这是因为，纳什均衡是在考虑对方每一种策略下做出的最好的应对策略。

第四，纳什均衡能够帮助我们看到一些现象背后的本质。了解纳什均衡，我们就能理解经济上、社会上一些现象的本质。有时候，当一个纳什均衡对整体不利时，就需要借助外力，改变一些策略下的收益，从而形成新的纳什均衡。后面“污染治理”的例子就很好地体现了这一点。

总之，学会纳什均衡既对我们的规划决策有参考价值，又对我们了解这个世界的本质有很大的帮助。

8.2　生活中的纳什均衡

8.2.1　公司之间的价格战

【背景】

从纳什均衡的普遍意义中我们可以深刻领悟司空见惯的经济、社会、政治、国防、管理和日常生活中的博弈现象。我们可列举出许多类似于“囚徒困境”的例子，如价格战、军备竞赛、污染等。例如，同行之间的价格战也会出现纳什均衡的局面，也就是最后出现双方都降价的均衡局面。

【问题】

现在有 A 公司和 B 公司都生产同一种产品，B 公司的生产成本比 A 公司要低，因此，在价格上有更多的利润空间。现在经过市场调研，双方都发现：

A 降价而 B 维持，则 A 获利 15，B 损失 5，整体获利 10；

A 维持且 B 也维持，则 A 获利 5，B 获利 10，整体获利 15；

A 维持而 B 降价，则 A 损失 10，B 获利 15，整体获利 5；

A 降价且 B 也降价，则 A 损失 5，B 损失 5，整体损失 10。

【解析】

首先，将问题描述成表格。

对于上述问题，可以将 A 公司和 B 公司各自的策略和相应的收益列成一张表格，如表 8–5 所示，这样方便之后标记这两家公司各自的最佳策略，并且从中找到纳什均衡。

表 8–5　市场调研表

A \ B	维　持	降　价
维　持	5, 10	−10, 15
降　价	15, −5	−5, −5

其次，根据表格分析双方各自的最佳策略。

从表 8–5 中可以清晰地看出，对于 A 公司而言，在无法摸清对手的策略时，最优的决策就是先降价，只有这样才能确保自己不会在市场竞争中让 B 公司占了上风。因为当 A 公司决定降价时，如果 B 公司还在维持价格，B 公司就要付出 5 单位的损失，而自己能收获 15 单位的盈利，从而在市场竞争中处于上风；即使 B 公司随后也降价，那么双方都得付出 5 单位的损失，因此，也未在市场竞争中处于下风。另外，假如 A 公司维持现价，无论 B 公司降不降价，它都处于劣势地位。总之，A 公司在做市场决策时一定会选择降价，在表 8–5 中标记 A 公司的最佳策略。

同样的，对于 B 公司，也会毫不犹豫地选择降价策略。因为当 A 公司降价时，B 公司是否降价影响不大，都得承受 5 单位的损失。但是，当 A 公司维持价格时，降价策略就会给 B 公司多带来 5 单位的盈利。显然，坚持降价策略对 B 公司而言是最优的，在表 8–5 中标记 B 公司的最佳策略。

最后，根据最佳策略找到纳什均衡。

综合上面的分析,可以发现表 8−5 中左右两个数均被标记的是(−5, −5)，这时双方的策略都是选择降价。因此，最终 A 公司和 B 公司都会采取降价策略，这时候每家公司都得承受 5 单位的损失，这就是价格战中的纳什均衡状态。

8.2.2　美苏之间的军备竞赛

【背景】

纳什均衡不仅体现在个人与个人之间、公司与公司之间的博弈，往大的方面说，国际上的双方博弈也体现出了纳什均衡。

【问题】

在第二次世界大战后的美苏冷战时期，美国和苏联都不断制造核弹，大搞军备竞赛。对于美国和苏联当中的任何一方，目前双方的军备都还未增加，这时候美国和苏联处于一种地位平衡的状态。但是，如果其中一方选择增加军备，而另一方继续维持现有的军备规模，那么增加军备的一方就会取得战略上的主动地位；如果双方都选择增加军备，则双方又将处于新的平衡状态。那么，美苏之间会是怎样的博弈结果呢?

【解析】

首先，将问题描述成表格。

对于上述问题，可以将美国和苏联这两个国家各自的策略和相应的收益列成一张表格，如表 8−6 所示，这样方便之后标记这两个国家各自的最佳策略，并且从中找到纳什均衡。

表 8-6　美苏军备扩张

苏联＼美国	维　持	增　加
维　持	平衡，平衡	被动，主动
增　加	主动，被动	新平衡，新平衡

其次，根据表格分析双方各自的最佳策略。

从表 8-6 中可以得到，对于美国和苏联，在不知道对方军备战略的时候，选择增加军备对自己是最有利的，也是一种最保险的决策。就拿美国来说，如果苏联维持军备规模不变，那么美国增加军备就能够占据优势地位，取得主动权；如果苏联增加军备规模，那么美国更不应该维持现有军备规模不变，为了取得对苏联的平等地位，也必须增加军备规模。因此，无论苏联采取怎样的军备战略，美国只要不断增加军备规模就能够不落下风。同时，在表 8-6 中标记美国的最佳策略。

同样的，对于苏联也是如此，无论美国有没有增加军备规模，苏联只有不断增加军备规模，才能确保自己在和美国的博弈中不会处于劣势地位。同时，在表 8-6 中标记苏联的最佳策略。

最后，根据最佳策略找到纳什均衡。

这时可以发现，表 8-6 中双方受益被标记的是(新平衡，新平衡)，双方的策略都是增加军备规模。因此，最终美苏双方都会选择不断扩大各自的军备规模，从而达到新的战略平衡。这就是美苏军备竞赛中的纳什均衡。

8.2.3　工厂之间的污染治理问题

【背景】

在实际的生产过程中，很多企业都会在处理污染物和不处理污染物之

间做出选择，而同一地方不同的两家企业在如何处理污染物的问题上又是一个相互博弈的过程。毕竟生态环境的自我净化能力只有那么大，每家企业都从自己的利益出发，都想着别的企业能够治理污染，而自家的污染物则指望大自然帮忙处理。

【问题】

在某个地方，共有甲和乙两家工厂，它们在治理污染物上不能达成一致，也无法知道对方的决策。经过调查发现，如果甲和乙都花钱治理污染，那么甲和乙生产得到的收益都是 5；如果甲和乙都不肯花力气治理污染，那么甲和乙生产得到的收益都是 3；如果甲没有治污，而乙选择治污，那么甲的收益将只有 1，而乙的收益则有 7；同样的，甲治污而乙没有治污，甲和乙的收益分别是 7 和 1。

请分析其中存在的纳什均衡，并详细说明分析过程。

【解析】

首先，将问题描述成表格。

对于上述问题，可以将甲和乙各自的策略和相应的收益列成一张表格，如表 8-7 所示，这样方便之后标记这两家公司各自的最佳策略，并且从中找到纳什均衡。

表 8-7　甲、乙对待污染的博弈

乙 甲	治　污	不 治 污
治　污	5, 5	1, $\underline{7}$
不 治 污	$\underline{7}$, 1	$\underline{3}$, $\underline{3}$

其次，根据表格分析双方各自的最佳策略。

从表 8-7 中可以看出，对于甲工厂来说，假如乙工厂治污，甲工厂的最优策略是不治污，此时，甲工厂能够获得的收益为 7，而参与治污获得的收益只有 5；假如乙工厂不治污，甲工厂的最优策略仍然是不治污，此时，甲工厂能够获得的收益是 3，如果此时甲工厂选择治污，则获得的收益只有 1。因此，对于甲工厂来说，最好的策略就是不治污，在表 8-7 中标记甲工厂的最佳策略。

类似的，对于乙工厂来说，无论甲工厂做出何种决策，乙工厂的最佳策略也是不治污，同样在表 8-7 中标记乙工厂的最佳策略。

最后，根据最佳策略找到纳什均衡。

这时候可以发现，表 8-7 中左右均被标记的是(3, 3)，双方的策略都是不治污。因此，最终甲、乙双方都会采取不治污的策略，这时候双方的收益都是 3。这就是甲工厂和乙工厂在治污博弈中的纳什均衡。

【问题延伸】

这个纳什均衡能够给环境治理带来一些什么启示呢？从纳什均衡的结果来看，如果不借助外力，每家工厂都会从自身的利益出发，不可能有丝毫参与治污的积极性，这会对当地的环境产生最坏的影响。因此，这时候需要政府想办法打破工厂之间的纳什均衡。政府可以采取哪些措施呢？

第一种措施：惩治污染严重的企业。

政府可以加强相关法规的制定和执行，惩治工厂不治污的行为，让工厂不治污时的收益比治污时减少 3。这时候，甲工厂和乙工厂都不治污时，它们的收益都会变为 0；只有一方治污时，不治污的一方的收益也会变为 4。甲工厂和乙工厂的策略就会变为表 8-8，这时候甲工厂和乙工厂各自的最佳策略均是选择治污，因此纳什均衡就会变成双方都治污，此时

它们的收益都是 5。这是一个对生态环境有利的纳什均衡。

表 8-8　惩治不治污企业后，甲、乙对待污染的博弈

甲＼乙	治　污	不 治 污
治　污	5, 5	1, 4
不 治 污	4, 1	0, 0

第二种措施：鼓励企业主动治污。

政府可以给予主动治污的工厂一些优惠措施，如给予治污补助，让工厂治污时能够提高 3 点收益。这时候，甲工厂和乙工厂都治污时，它们的收益都会变为 8；只有一方不治污时，治污的一方的收益会变为 4。甲工厂和乙工厂的策略就会变为表 8-9，这时候甲工厂和乙工厂各自的最佳策略均是选择治污，因此纳什均衡就会变成双方都治污，此时它们的收益都是 8。这也是一个对生态环境有利的纳什均衡。

表 8-9　给予治污企业优惠后，甲、乙对待污染的博弈

甲＼乙	治　污	不 治 污
治　污	8, 8	4, 7
不 治 污	7, 4	3, 3

8.2.4　密封袋子交易

【背景】

有一个类似于“囚徒困境”的简单博弈问题，叫作“密封袋子交易”，了解这个问题，有助于我们进一步理解纳什均衡，还能帮助我们理解市场交易中诚信的重要性。“密封袋子交易”的问题是这样的：甲、乙两人的

交易方式就是面对面交换各自密封的袋子，其中甲是买家，乙是卖家，因此甲的袋子应该放钱，乙的袋子应该放商品，然后双方进行交换。但是，由于袋子是密封的，甲、乙两人既可以选择诚实地进行交易，交换装了钱或者商品的袋子；也可以选择背叛对方，不放钱或者不放商品，把空袋子交给对方。

【问题】

为了进一步说明这个问题，可以适当地用数字来描述各自的收益或者损失。假设双方诚信交易时，各自得到的收益都是 1；如果一方背叛，另一方选择诚信交易，那么选择背叛的一方肯定会得到极大的收益，收益是 10，诚信交易的一方则会受到损失，收益变为−10；如果双方都选择背叛对方，那么整个交易就是一次浪费，双方都会有轻微的损失，收益都会变为−1。根据这些信息，那么，甲、乙两人的交易结果会是怎样的呢?

【解析】

首先，将问题描述成表格。

对于上述问题，可以将买家甲和卖家乙各自的策略和相应的收益列成一张表格，如表 8−10 所示，这样方便之后标记这两个人各自的最佳策略，并且从中找到纳什均衡。

表 8−10　买家甲和卖家乙的博弈

乙 / 甲	诚　信	背　叛
诚　信	1, 1	−10, <u>10</u>
背　叛	<u>10</u>, −10	<u>−1</u>, <u>−1</u>

其次，根据表格分析双方各自的最佳策略。

从表 8-10 中可以看出，对于买家甲而言，假如卖家乙选择诚信交易，那么甲在利益的驱使下，最佳策略是选择背叛，与选择诚信相比，这会给他带来 10 的收益。假如卖家乙选择背叛，那么甲会考虑到诚信交易的风险，最佳策略也是选择背叛，因为选择诚信和选择背叛相比，意味着会出现 10 的损失。因此，无论乙选择诚信还是背叛，买家甲的最佳策略都是选择背叛，在表 8-10 中标记买家甲的最优策略。

同样的，对于卖家乙来说，无论买家甲选择什么样的策略，卖家乙的最佳策略也是背叛，同样在表 8-10 中标记卖家乙的最佳策略。

最后，根据最佳策略找到纳什均衡。

这时可以发现，表 8-10 中左右均被标记的是(-1，-1)，双方的策略均是背叛。因此，甲和乙在这次交易中就会出现纳什均衡，双方最终都会选择背叛对方。显然，这对于双方来说并不是一个好结果，因为他们都得在这次交易中承受 1 单位的损失。

【问题延伸】

总之，在上述买家和卖家的博弈过程中，由于背叛可获得巨大利益，让诚信的一方会面临极大的风险，必然有很多人选择背叛。对于这样的交易方式，懂得纳什均衡的商家自然不会参与到这场交易之中，明智的买家也不会拿自己的钱去冒险，这也就意味着因为交易方式的不当而失去了市场。如果交易中出现这样的纳什均衡，那么对于交易的双方来说都不会是良性的结果。这也说明，打击假劣产品，打击虚假交易，维护诚信者的利益，让背叛者承担更高的风险，对整个市场的良性运转至关重要。

8.2.5 自行车赛的大队伍

【问题】

经常看长途自行车赛事的人一定会发现一种有趣的现象：大部分选手组成一支很长的大队伍，向着终点前进，似乎这些选手都不愿意处于领先的位置。细心的人还会进一步发现，虽然自行车比赛的整个距离都很长，但是从起点到终点的大部分路段，都是以这种“大队伍”的方式前进的，并且大队伍的速度对于这些选手来说显得有点慢。只有快到终点时大队伍才逐渐散开，有的选手越来越快，将其他选手甩在了后面。为什么会出现这种现象呢?

【解析】

这里面其实也可以用纳什均衡的原理来进行解释，而自行车赛事，从某个方面来说，也是一个类似于“囚徒困境”的博弈过程。

为什么自行车赛事过程是博弈?

这还得从自行车赛的特点说起。在离终点较远时，选手跟在大队伍中，并不是不想领先，很多选手只是在“省力”。自行车前进时，必然会受到风的阻力，自行车的速度越快，风的阻力也就越大，因此选手额外消耗的能量也就越多。对于长距离的路程，空气的阻力对选手体能的消耗并不是一件可以忽略的事，这往往影响到选手在接近终点前是否有足够的体力进行冲刺。而在大队伍最前面的选手承担的阻力远大于处于大队伍后面的选手，后面的选手骑在前面选手的冲流之中，比较不费力。

每个选手都会选择对自己最有利的策略。

因此，在自行车比赛过程中，尤其是在离终点较远时，每个选手都会在自己心里盘算着该做出怎样的决策，即如何才能尽可能地保存自己的体

力，消耗对方的体力。对于每个选手来说，他们的博弈心理都是这样的：如果对方前进的速度较快，那么自己的最佳策略就是放慢速度，跟在对方后面；如果对方也放慢速度，那么，为了不吃亏，最佳策略仍然是进一步放慢速度，跟在对方后面，因为当领先别的选手时，自身在迎风时受到的阻力也是最大的，消耗的体力最多。总之，无论竞争对手是否选择以较快的速度前进，自己所选择的最佳策略仍然是放慢速度，跟在某些选手后面，既不会令自己太落后，又出力适中、节省体力，同时还能让领先的竞争对手消耗更多能量。

从策略收益表中找到纳什均衡。

经过上面的分析，可以将选手之间的策略和收益列成表 8-11，并且标记双方各自的最佳策略。

表 8-11　自行车赛选手之间的博弈

自己＼对手	领　先	紧　跟
领　先	费力，费力	费力，<u>省力</u>
紧　跟	<u>省力</u>，费力	<u>省力</u>，<u>省力</u>

从表 8-11 中可以发现，当选手都选择紧跟策略时，这就形成了一个纳什均衡。这也就解释了自行车赛事中的大队伍现象。在离终点较远时，所有的选手都不会用全力，都想紧跟在别的选手后面，从而形成大队伍，并且大队伍的速度较慢。当离终点较近时，这时候省力已经不是最佳策略，所有选手都会用尽最后一点力气进行冲刺，因此，大队伍就这么散了。有的选手因为一直跟在别的选手后面，节省的力气较多，就能够更快地冲刺，从而后来居上。

第 9 章

静态博弈：不分决策先后的博弈过程

“囚徒困境”是一个典型的静态博弈例子，纳什均衡也是一些静态博弈中常见的现象。对于静态博弈，还有一些非常典型的例子，它们得到的结果与“囚徒困境”得到的结果不太相同，这些典型的例子也能给我们日常生活的决策提供启发。

9.1　外行看懂静态博弈

静态博弈是指双方的决策是没有先后顺序的，基本可以认为是同时做出决策的，等到双方都做完决策，就能得到最后的结果，而不需要再进行下一阶段的决策。现实生活中许多博弈都是静态博弈，博弈双方做出决策并不依赖规定的次序。本节主要介绍几个典型的静态博弈，如智猪博弈、猎鹿博弈、情侣博弈和斗鸡博弈等。

9.1.1　智猪博弈

智猪博弈讲述的是大猪、小猪之间争夺食物的博弈，这个博弈最早是由纳什本人提出的。智猪博弈具体是这样的：猪圈里有两头猪，一头大猪，一头小猪。猪圈的一端有个开关，另一端是食槽，食槽和开关之间隔着较长的一段距离。每按一下开关，在远离开关的猪圈的另一端，食槽就会落下一些食物。两头猪最初在食槽这端，如果有一头猪去按开关，另一头猪就有机会抢先吃到另一端流进的食物。当小猪按动开关时，大猪会在小猪跑到食槽之前吃掉绝大部分食物；若是大猪按动了开关，则还有机会在小猪吃完流进来的食物之前跑到食槽，争着吃小猪还未吃完的大部分食物。

那么，大猪和小猪将会做出怎样的决策，让自己能够吃到更多的食物，不会被饿死呢?

这是一个静态博弈过程，大猪、小猪必须同时做出决策，并且这里面也没有决策的先后之分。因此，我们可以像分析“囚徒困境”问题一样，列出这个博弈过程中双方的策略表。

如果按了开关，就会有 10 单位的食物流进食槽；但是，对于大猪和小猪来说，从食槽这端跑去按开关再跑回食槽这端，都需要消耗相当于 2 单位食物的能量。

如果大猪和小猪同时去按开关，接着再跑回食槽这端吃食，大猪吃得快，将吃到 7 单位的食物，小猪则只能吃到 3 单位的食物，此时，减去各自耗费的 2 单位，大猪的净收益是 5 单位，小猪的净收益是 1 单位。

如果大猪去按开关，小猪等着先吃，大猪再赶回来吃，这样，大猪只能吃到 6 单位的食物，小猪则可以吃到 4 单位的食物，此时，大猪去掉按开关过程中耗费的 2 单位，它的净收益是 4 单位，小猪没有消耗，得到的净收益是 4 单位。

如果小猪去按开关，大猪等着先吃，小猪再赶回来吃，这样，小猪只能吃到 1 单位的食物，大猪则可以吃到 9 单位的食物，此时，小猪去掉按开关过程中耗费的 2 单位，它的净收益是−1 单位，大猪没有消耗，得到的净收益是 7 单位。

如果大猪和小猪都不去按开关，那么，最终结果是谁也吃不到，此时，双方的净收益都是 0。

根据上述条件，就可以得到智猪博弈过程中双方的策略和收益表，如表 9-1 所示。从表 9-1 中可以看出，假如小猪足够理性，如果大猪选择按开关，对小猪来说最好的决策就是选择等待，此时小猪能够得到 4 单位的收益；如果大猪选择等待，对小猪来说最佳的决策仍然是选择等待，因为小猪去按开关的话不仅没有收益，还要承受 1 单位的损失。因此，无论大猪采取什么策略，小猪一定会选择等待，不会去按开关。

表 9-1　大猪和小猪之间的博弈

小猪 \ 大猪	按开关	等待
按开关	1, 5	−1, 7
等待	4, 4	0, 0

再来分析大猪，假如大猪足够理性，对于大猪来说，它当然希望小猪能够主动去按开关，这时自己的收益最大。但是，它心里明白小猪一定不会选择按开关。如果小猪选择等待，那么，大猪的最佳策略就是去按开关，这时还能有 4 单位的收益；而不按开关，则没有收益。因此，大猪主动按开关总比双方等待要好。

综合上面的分析，也就得到在这个博弈过程中，大猪会主动去按开关，小猪则会默默在食槽旁等待流进来的食物。这就是这个静态博弈中的纳什均衡。需要注意的是，在这个博弈过程中，对于大猪来说，并不像小猪那样，有各种情形下都是最佳的策略。这个博弈也告诉我们，在一些静态博弈过程中，当我们没有在各种情形下都是最佳的策略时，就需要考虑对方会选择什么策略，然后据此来选择自己的策略。

在现实生活中，经常会出现类似的博弈现象，其中实力较弱的一方就是“小猪”，实力较强的一方则是“大猪”。如果我们是博弈中的“小猪”，就可以借鉴智猪博弈中小猪的智慧，虽然小猪很弱小，但是可以采用等待的策略，这样就能够搭上“大猪”的便车，确保自己在博弈中得到的收益最大。从下面的案例中就可以明白如何做一只“躺着吃”的“小猪”。

在市场上也可以找到小猪和大猪之间的博弈。当某个市场还是一片空白，需要进行开拓的时候，瞄准这个市场的大企业和小企业就是猪圈中的大猪和小猪，而开拓市场就是按下开关，这时小企业的最佳策略就是像小猪一样，等待大企业主动去开拓市场，待市场开拓得差不多时，再来和大

企业一起瓜分这个市场。因为小企业自己去开拓市场，风险极大，很容易走一些弯路，遭受损失，甚至因此破产；而等待不仅没有风险，还能瞄准机会，分享大企业创造的市场红利。

9.1.2 猎鹿博弈

在启蒙思想家卢梭的著作《论人类不平等的起源和基础》中，讲述了两个猎人之间的博弈故事：在一个村庄中，有两个猎人。猎人们每天都出去捕猎，他们捕猎时的猎物主要是鹿和兔子这两种，但是猎取鹿比猎取兔子要难得多。如果一个猎人独自去猎取食物，则一天最多只能抓到 4 只兔子；只有两个猎人一起去捕猎时，才能猎到一只鹿。同时，一头鹿比一只兔子要大得多，4 只兔子能保证一个人 4 天不挨饿，而一只鹿却能让两个人吃上 10 天。那么，这两个猎人将会选择怎样的捕猎策略呢?

在上述博弈过程中，两个猎人之间的决策同样没有先后之分，可以认为是同时做出决策的，这也是一个典型的静态博弈过程。这个经典的静态博弈叫作猎鹿博弈。根据上述条件，可以得到这两个猎人各自的策略和相应的结果。假如这两个猎人是甲和乙，对于他们来说，策略只有抓兔和猎鹿这两种。如果甲和乙都去猎鹿，那么他们获得的那头鹿就能让每个人吃 10 天，也就是此时两人的收益都是 10；如果甲和乙都去抓兔，这时每人抓到 4 只兔子，两人各自能吃上 4 天，他们的收益都是 4；如果甲和乙分开行动，其中一人去抓兔，另一人去猎鹿，这时，抓兔的人能够获得 4 只兔子，收益是 4，而猎鹿的人不能得到鹿，收益是 0。

因此，根据上述分析，可以得到猎鹿博弈中猎人甲和乙的策略和收益表，如表 9-2 所示。

表 9-2　猎鹿博弈策略和收益表

甲 \ 乙	抓　兔	猎　鹿
抓　兔	4, 4	4, 0
猎　鹿	0, 4	10, 10

通过表 9-2 可以分析双方各自的最佳策略。对于猎人乙来说，如果猎人甲选择去抓兔，那么猎人乙的最佳策略将是选择去抓兔，因为猎人乙一个人去猎鹿时，将会一无所获；如果猎人甲选择去猎鹿，那么猎人乙的最佳策略也是选择猎鹿。同样的，对于猎人甲来说，当猎人乙选择抓兔时，猎人甲的最佳策略是抓兔；当猎人乙选择猎鹿时，猎人甲的最佳策略是猎鹿。

这个博弈过程和囚徒困境不一样，在猎鹿博弈的过程中有两个纳什均衡，即当两个猎人都选择抓兔，或者都选择猎鹿时，都构成了纳什均衡。因为当两个猎人都选择抓兔时，任何一个猎人改变自己的策略去猎鹿，就会变得没有收益，而抓兔的收益是 4；同样，当两个猎人都选择猎鹿，任何一个猎人改变自己的策略去抓兔，他的收益就会减少为 4，而一起猎鹿带来的收益是 10。一旦达到这两种情形，每个猎人都不会再改变自己的策略，所以，这两种情形都是博弈过程中的纳什均衡。

在猎鹿博弈中，可以看出，在这两个纳什均衡中，如果双方都选择猎鹿，那么这个策略组合对于双方都是最优的；如果双方都选择去抓兔，那么这个策略组合对于双方来说并不是最优的。因此，甲、乙双方可以通过事先的沟通，确定双方合作去猎鹿，并且这种合作关系是可以维持的。因为如果某个猎人选择背离合作，私自去抓兔，那么他的收益将会减少。

而在囚徒困境中只有一个纳什均衡，就是囚徒双方都坦白，但双方都隐瞒才是对他们这个整体最优的。这时候，即使双方之前经过沟通，约定互相隐瞒，但是，在决策的时候，也极有可能从各自的利益出发，选择背叛对方。

现实生活中，在博弈的时候，当不合作时双方的利益都会下降，这时候就会出现合作共赢的纳什均衡，就好比猎鹿博弈中双方都选择猎鹿。和囚徒困境相比较，也能够得到，要建立稳定的合作关系，就需要让选择背叛的一方付出更大的代价，让背叛得到的收益比双方合作时要小。

9.1.3 情侣博弈

生活中，情侣之间也会在许多小事上展开博弈。例如，甲和乙是一对情侣，平时上班都很忙，难得周六晚上能在家一起过，但是家里只有一台电视机，双方为了争夺电视机就展开了博弈。

甲是个足球迷，今天晚上电视要转播一场他喜欢的足球赛，两人一起看足球对甲的收益是 2。乙对足球一窍不通，但因为能和甲在一起，今晚一起看足球的收益是 1。乙喜欢某个明星，想看这位明星参演的偶像剧。两人一起看偶像剧对乙的收益是 2，和乙在一起看偶像剧对甲的收益是 1。可是，如果甲坚持选择看足球，乙坚持要看偶像剧，双方不肯妥协，最后只好大家都不看电视，这时双方的收益就都变为 0。那么，甲和乙该如何做出决策?

甲和乙之间的博弈是静态博弈，双方的决策并没有先后之分，是同时进行决策的。根据以上信息，可以列出这对情侣之间的博弈策略和收益表，如表 9-3 所示。从表 9-3 中可以看出，对于喜欢看足球的甲来说，假如乙选择向自己妥协，这时候自己的最佳策略就是和乙一起看足球，收益是 2；假如乙坚持要看偶像剧，这时候的最佳策略就是向乙妥协，和乙一起看偶像剧，收益是 1，否则就没有任何收益。同样的，对于喜欢看偶像剧的乙来说，当甲选择看足球时，最佳策略是选择妥协，和甲一起看足球，这时收益是 1；当甲选择向自己妥协时，最佳策略就是看偶像剧，收益是 2。

表 9-3　情侣博弈的策略和收益表

甲＼乙	看 足 球	看偶像剧
看 足 球	2, 1	0, 0
看偶像剧	0, 0	1, 2

根据上述分析，可以看出，这场博弈的纳什均衡是一方坚持，而另一方妥协。因此，在这场博弈中共有两个纳什均衡，即甲和乙都选择看足球，或者甲和乙都选择看偶像剧。因为如果双方达成一致，一旦任何一方做出不一样的选择，就会让自己的收益变为 0。

可以看出，和猎鹿博弈一样，在情侣博弈中，双方都没有一个在各种情形下都是最佳的策略，这和囚徒困境不一样。双方必须达成一致才能有收益，否则双方都没有任何收益。无论是对个人而言，还是从整体利益出发，达成一致都是双方所希望的。这和猎鹿博弈又有区别，对于甲来说，一起看球是最佳策略，对于乙来说，一起看偶像剧是最佳策略；而在猎鹿博弈中，合作猎鹿是对双方最有利的决策。

因此，在情侣博弈中，博弈的最终结果将取决于谁能够说服对方，取决于谁的决心更大。如果一方坚持自己的意见，展示出丝毫不愿意妥协的决心，谁就会是最大的赢家。例如，如果甲坚持要看足球，打死也不看偶像剧，那么，乙考虑到双方争执都得不到好处，就会和甲一起看足球，甲就是这场博弈中的最大赢家。如果乙表明宁愿电视机关着也不愿看足球，那么就会让甲妥协，乙最后也看偶像剧。

在现实生活中，情侣博弈非常常见。竞争对手之间自然不会像情侣那样亲密，但是他们之间至少也有一点共同利益，如果双方都不肯达成一致，那么一方成为最大赢家，另一方也能获得收益，至少比双方不合作要强。因此，遇到类似博弈，就需要考虑对方的决心，如果对方容易妥协，就表

明自己的强硬态度，让自己的收益变得最大；如果对方始终不肯妥协，那就只好按照对方的意思来，这样也能获得收益，总比双方不一致时没有收益要好。

9.1.4 斗鸡博弈

有句话说得好：狭路相逢勇者胜。当两个人狭路相逢时，双方也在进行着一场博弈。这种狭路相逢中的博弈就叫作“斗鸡博弈”，这场博弈可以被简单地描述成这样：

假如两个人狭路相逢，对于每个人来说，都有两种行动选择，要么选择后退，要么选择前进。对于这两个人来说，如果一方选择后退，而另一方却没有选择后退，而是选择前进，那么，前进的那一方就获得了这场博弈的胜利，捞到了好处，而后退的这一方就会受到面子上的损失；如果双方都选择后退，谁也没有选择前进，那么，谁也没有捞到好处，意味着双方在这场博弈中打个平手；如果双方都选择前进，谁也不肯给对方留面子，那么，双方将会在这次博弈中两败俱伤。

那么，在上述斗鸡博弈中，博弈的双方各自将会做出怎样的选择呢?

从博弈过程来看，参与博弈的双方需要同时做出决策，并且他们的决策同时生效而没有先后之分，因此，斗鸡博弈是一种典型的静态博弈。为了更加形象地分析这个博弈过程，我们不妨对博弈过程中可能出现的每种结果都用数字来表示双方的收益。这样，在分析博弈过程中策略的优劣时，我们只需比较数字的大小即可。

不妨用数字来这样描述斗鸡博弈：如果双方都选择前进，就会两败俱伤，此时每个人的收益都是−2；如果一方选择前进，而另一方选择退让，

前者成为赢家，收益是 1，后者丢了面子，收益是−1；如果双方都选择退让，这时谁也没捞着对方的好处，此时每个人的收益都是−1。同时，我们假设斗鸡博弈中这两个人分别是甲和乙。因此，根据这些描述，我们便可以列出斗鸡博弈中甲、乙双方的策略和收益表，如表 9−4 所示。

表 9−4　斗鸡博弈中甲、乙双方的策略和收益表

甲＼乙	前　进	后　退
前　进	−2, −2	1, −1
后　退	−1, 1	−1, −1

从表 9−4 中可以看出，在甲和乙的斗鸡博弈中，对于甲来说，如果乙选择前进，那么，无论甲接下来做出何种选择，得到的收益都会小于 0，即都会受到损失，但是，相比较而言，甲的最佳策略是选择后退，因为后退带来的损失更少，损失为 1；如果乙选择后退，那么，甲的最佳策略必然是选择前进，因为前进能带来收益，收益为 1，而后退则会带来损失，损失为 1。同样的，对于乙来说，如果甲选择前进，乙在此时不可避免地会遭受损失，但相对而言的最优策略是选择后退，承受 1 单位的损失；如果甲选择后退，乙在此时的最佳策略就是前进，能够获得 1 单位的收益。

从双方的决策分析来看，对于甲和乙中的每一方，最好的结果都是对方选择后退，自己不退让，而是选择前进，这样才能获得收益，而在其余情形下都要受到损失；对于每一方来说，最差的情形就是双方都选择前进，这会两败俱伤，让双方都受到这场博弈中最大的损失。

因此，在这场博弈中有两个纳什均衡，其中一方选择前进，另一方选择后退，都可以形成稳定的策略组合。当一方选择前进而另一方选择后退时，如果选择前进的那一方改变自己的策略，选择后退，他就得不到 1 单位的收益，反而还要受到 1 单位的损失；如果选择后退的那一方改变自己

的策略，选择前进，双方就会两败俱伤，会给自己带来更大的损失。只有一方选择前进，另一方选择后退，才能达到纳什均衡。

从整体的角度来看，这两个纳什均衡也是最佳的策略组合，这时总体的收益是 0，在其余情形下，总体都会受到一定的损失，并且最差的情形就是双方都选择前进，这时候总体的损失达到 4 单位。这也带给我们一些启示，如果遇到了生活中的斗鸡博弈，我们很难摸清楚对方的策略，因为对方既可能选择前进，又可能选择后退，同样的，对方也无法摸清我方的策略。因此，在斗鸡博弈中，应该尽可能地多了解对方，多和对方沟通协商，不要轻易做出决策，要依靠一些额外的信息来预判对方的策略，为自己的决策提供参考。

如果不能依靠额外的信息来为决策提供参考，那又该怎么办呢？这时候就需要敢于亮剑，坚定、迅速地采取前进的策略，迫使对方后退，因为对方见到我方采取前进策略，从自身利益出发，必然不会前进，而是采取后退策略。这时候，我方就能获得 1 单位的收益，而对方需要承担 1 单位的损失。因此，“狭路相逢勇者胜”、“敢于亮剑”还是有一定道理的，至少是包含运筹学知识的。

9.2　生活中的静态博弈

9.2.1　如何让竞争对手跟着涨价

【背景】

商场如战场，每天都在上演着没有硝烟的战争，而价格就是双方争抢的一个重要阵地，涨价和降价就是商家常用的一些“战争手段”。有些时

候，有的商家会考虑涨价，让自己获得更多的利润，但是又惧怕对方维持现有的低价格，吸引更多的客户。这样会导致涨价商家的客户流失，使涨价商品的销量大大下降，反而得不到想要的高收益。如果让竞争对手也跟着自己一起涨价，那么市场的价格又会达到新的平衡状态，这时候就能得到更高的收益，达到涨价的目的。

【案例】

如何让竞争对手也跟着涨价，这里面包含了商家之间的博弈过程。两个商家是否选择涨价，这其实是一个情侣博弈问题，双方都有一定的共同利益，只是涨价之后，一个商家获得的收益要多，另一个商家获得的收益要少。这时候，谁的态度更强硬、决心更大，就越能让对手跟着自己的策略走。我们从传媒大亨默多克的故事中可以了解到，在价格博弈中，如何让竞争对手跟着自己涨价。

默多克手中的《纽约邮报》的价格是 40 美分，《纽约邮报》的竞争对手《每日新闻》现在的价格也是 40 美分。默多克为了降低运营成本，想让《纽约邮报》涨价 10 美分，定价为 50 美分，便率先采取了涨价策略，这时候，《每日新闻》并未跟着涨价。顾客见到《每日新闻》更加便宜，便纷纷退订了《纽约邮报》，转向《每日新闻》，这导致《纽约邮报》的发行量和广告收入都在不断减少。这时，默多克坐不住了，看着《每日新闻》坚定地维持原来的价格不变，就决定逼迫这个竞争对手一起涨价。

默多克决定向《每日新闻》展现自己要打赢这场价格战的决心，在局部地区对《每日新闻》开展报复性行为。为此，默多克下令在《每日新闻》销量最多的地区实现大幅度降价策略，在这个局部市场上将《纽约邮报》的价格降到了 25 美分。果然，在这个局部市场上，《纽约邮报》的销量一扫颓势，呈直线上升，迅速碾压了当地的《每日新闻》。显然，这时博弈的双方是两败俱伤的。过了不久，《每日新闻》的高层管理者明白了默多

克的意思，便决定将《每日新闻》的价格也定为 50 美分，默多克终于达到了目的。

【启示】

在这个商业故事中，默多克之所以要在涨价之后再开展局部的降价报复行为，甚至不惜两败俱伤，就是因为默多克发现对方并没有跟随自己的涨价策略，这是对自己不利的局面。同时，默多克也明白，在这个博弈过程中，谁的决心更强，谁的实力更雄厚，谁就能逼迫对手跟着自己的策略走，从而确保自己获得更大的收益。这里面还有一点值得借鉴的是，默多克展示决心的降价行为选择在局部地区进行，并且深入对方的要害地区，最终以局部的损失换来了全局的胜利。

9.2.2　如何吓跑潜在的竞争对手

【背景】

在市场上，每位商家不仅要面对已经存在的、看得见的、每天都在相互较量的竞争对手，还需要提防那些看不见的、准备进入市场、来势汹汹的潜在竞争对手。因此，有些时候，如果现有的竞争对手并不能构成威胁，那么，商家的重点就不再是和现有的竞争对手较量，而是把即将到来的潜在竞争对手吓跑，稳固自己在这个市场上的地位。

如何吓跑潜在竞争对手，这也是商家和潜在竞争对手之间的一场博弈。由于市场上的资源是有限的，因此，潜在竞争对手进来之后，就必定会影响到自己的市场收益。同样的，如果市场上现有的商家不断扩大生产、开拓市场，那么，留给潜在竞争对手的市场空间就非常有限，这些对手自然会知难而退。根据这些特征，可以发现，这场博弈就是我们前面讲到的斗鸡博弈。

【案例】

举个具体的例子，假如你在一个小区里面开了一家洗衣店，没有什么竞争对手，生意不错。但不久之后，某个同行考察了这个小区，也想在此开一家新的洗衣店。这时候，你明白这个小区的居民是有限的，他们是这家洗衣店绝大部分的客户来源，如果有新的洗衣店入驻小区，就会拉走一部分客户，让这家洗衣店的收益减少。因此，你必须尽可能地阻止这位潜在的竞争对手进入这个小区。

这就进入了斗鸡博弈的处境之中，需要敢于亮剑，做狭路上的勇者，让对手明白前进没有什么好处，知难而退。如何表明自己的勇气和决心呢？首先，可以选择成本较低的方式。例如，口头警告对手：如果你胆敢来开店，本人发誓疯狂降价，死磕到底！但是，这样的方式很有可能起不到真正的作用，只是虚张声势，不能阻止对手进入这个小区。因为对手会考虑到你的警告是虚假的，是不可信的，即使开新的洗衣店，你也不会进行自杀式降价，这对双方都没有好处。

如果低成本的方式不管用，就必须挽起袖子，向对手亮出真正的肌肉，和对手掰一掰手腕。因为这场博弈中双方所争夺的核心就是小区的客户资源，既然潜在对手要进入这个小区开新的洗衣店，就说明这个小区还有客户资源可以挖掘。所以，要让潜在对手知难而退，就必须拿出实际行动，把小区中有待挖掘的客户资源牢牢掌握在自己手里。这时候，不妨在洗衣店中再添加洗衣设备，招聘新员工，并且提供上门取送服务，加大洗衣店的服务范围，尽可能将小区中有洗衣需求的居民都发展成自己的稳定客户。

这时候，对手眼看小区的绝大部分客户资源已经被人占据，如果自己再进入这个小区开新店，岂不是连汤都没得喝了？因此，这位潜在的竞争对手会相信你的决心、佩服你的行为，进而从自身的利益出发，主动地知难而退。

【启示】

从上面这个分析案例中可以看出，当我们遇到和斗鸡博弈类似的相关博弈时，仅仅做些表面功夫，如口头警告等，很多时候并不能给对方造成可信的威胁，不能起到真正的“亮剑”效果。这时需要用实际行动来表明殊死一搏的决心，对方见状一定会从自身利益出发，选择退让一步。这时候，我们就能赢得这场博弈的胜利，从博弈中获得最多的利益。

9.2.3　警惕团队中“搭便车”的现象

【问题】

在智猪博弈中，小猪毫不费力，而大猪则必须跑来跑去。这是由这场博弈的规则造成的。在现实生活中，一个人在不同的场合下也变换着博弈中的身份，有可能你在这场博弈中是“小猪”，也有可能你要在那场博弈中充当“大猪”，这就需要从不同的角度来分析智猪博弈。如果我们是“小猪”，那么需要用到智猪博弈中小猪的智慧，躺着等到大猪去行动；但假如我们是这个博弈规则的制定者，我们就需要考虑怎样避免小猪的懒惰现象，充分调动大猪和小猪的积极性。

那么，在智猪博弈中如何让“小猪跑起来”？

【解析】

在智猪博弈中，小猪静静躺着等待食物，无所作为，虽然这是小猪的最佳策略，但是这对大猪来说是不公平的。从整体角度来看，小猪躺着偷懒，这是一种资源的浪费，要想让小猪跑起来，就需要通过改变博弈规则，打破原来形成的小猪躺大猪跑的纳什均衡。我们可以考虑以下三种办法。

第一种办法：减少流进食槽的食物量。当食物量减少到一定量时，例

如，减少到 2 单位，小猪仍然不会选择去按开关，但是，这时候，如果大猪去按开关，由于食物量较小，小猪就会在大猪赶回食槽之前把食物吃光，那么大猪必然也不会选择去按开关，这时博弈中形成的纳什均衡是大猪、小猪都选择等待，谁去按开关就意味着要为对方而损害自己的利益，这时形成的结果对双方都是公平的。

第二种办法：大量增加流进食槽的食物量。当食物量增大到一定量时，例如，增加到 25 单位，这时候即使小猪按开关，等小猪赶回食槽旁，仍然剩下大量的食物，根本不用担心自己会有损失；对于大猪而言，也是如此，不用担心自己会吃亏。因此，小猪也会选择去按开关，这时候就打破了原来的纳什均衡。

第三种办法：将开关放到食槽旁，规定谁按开关谁先吃食物。这时候，小猪和大猪就都会拼尽全力去争着按开关，小猪如果躺着，就可能一点食物也吃不到。这时候就相当于多劳多得，谁按开关次数多，谁吃得多，而躺着的猪是吃不到食物的。

【问题延伸】

在现实生活中，对于整个社会而言，出现“小猪躺着”的现象就是一种资源的浪费。小猪坐享其成，不愿付出劳动，就不能给整个社会创造价值。特别的，当我们是公司的管理者时，公司的员工就是“大猪”和“小猪”，而对员工的奖励就是“食物”。从公司的整体利益出发，就需要警惕“小猪躺着”的现象，需要尽可能地调动所有员工的积极性，发挥员工的才能，同时保障员工之间的公平竞争。如果出现小猪搭大猪的便车这种现象，则只能说明公司的激励制度出现了问题。

从上述三种办法中可以看出，如果从公司的整体利益考虑，第一种办法相当于尽量减少激励，甚至不采取激励措施，这时员工的积极性会下降，

甚至谁也不愿选择行动，这对公司是极不利的；第二种办法相当于加大激励力度，甚至让每个员工都得到激励，这种无差别的激励虽然“喂饱”了每一位员工，但是他们的积极性也不会提高；而第三种办法，只给出适量的激励，不可能人人有份，需要每个员工通过自身努力去争取，这时候对员工的激励作用是最大的，“躺着的小猪”将得不到任何的激励，从而杜绝了有些员工偷懒，搭别人的便车。

9.2.4　总会遇到的“雪堆博弈”

【背景】

在现实生活中，很多时候我们需要和别人一起合作，共同解决某个难题。例如，学生组成一个小组，要一起完成小组展示；科学家一起完成某个实验；工作团队一起完成某个项目等。可以说，生活中很大一部分事只有通过相互合作，才能高效地完成预定的目标。如果单打独斗，效率就会很低，取得的效果也会打上折扣。但是，合作的过程并不都是齐心协力的，总会有些内部冲突。有些时候，合作的双方会打着自己的算盘，并不是从整体利益出发来考虑问题，双方之间也在进行着某种博弈。这种博弈可以简化为下面的“雪堆博弈”。

【问题】

在一个风雪交加的夜晚，甲和乙两人相向而来，被一个雪堆所阻。假设铲除这个雪堆使道路通畅需要付出的代价为 2，如果道路通畅则带给每个人的收益就是 3。如果两人一起动手铲雪，则他们各自付出的代价都是 1，因此各自的收益都是 $3-1=2$；如果只有一人铲雪，那么，虽然两个人都可以回家，但是背叛者逃避了劳动，没有付出任何代价，因此他的收益为 3，而合作者付出的代价是 2，他的收益为 $3-2=1$；如果两人都选

择不合作，那么两人都将被雪堆挡住而无法回家，虽然没有付出劳动的代价，但是也没有任何收益，因此他们的收益都为 0。

【解析】

首先，将问题描述成表格。

对于上述问题，可以将甲、乙两人各自的策略和相应的收益列成一张表格，如表 9-5 所示，这样方便之后标记两人各自的最佳策略，并且从中找到纳什均衡。

表 9-5　雪堆博弈的策略和收益表

乙 甲	铲　雪	不 铲 雪
铲　雪	2, 2	1, 3
不 铲 雪	3, 1	0, 0

其次，根据表格分析双方各自的最佳策略。

从表 9-5 中可以看出，对于甲来说，当乙选择铲雪的时候，甲的最佳策略就是不铲雪，因为不铲雪能够让自己免除劳动的代价，得到的收益是 3；当乙的策略是不铲雪时，甲的最佳策略则是铲雪，因为铲雪即使付出了 2 单位的劳动代价，但是仍然会给自己带来 1 单位的收益，而不铲雪就没有收益。

同样的，对于乙来说，当甲选择铲雪时，乙的最佳策略也是选择不铲雪；当甲选择不铲雪时，乙的最佳策略也是铲雪。

最后，根据最佳策略找到纳什均衡。

我们在表 9-5 中将甲和乙在各种情形下的最佳策略标记之后，就可以发现在这场博弈中存在两个纳什均衡，即甲铲雪而乙不铲雪、甲不铲雪而乙铲雪，其中铲雪一方的收益是 1，不铲雪一方的收益是 3。

从这个分析结果中也可以得到，即使甲和乙之前决定一起铲雪，甲和乙当中的每个人都有可能选择违背合作，选择不铲雪的策略。但是，这又和囚徒困境有些不同，对于囚徒困境来说，选择沉默始终都不是囚徒双方的最佳策略，并且对于整体来说，极有可能出现双方互相揭发这种最坏情况；而在雪堆博弈中，无论是对于甲还是对于乙，选择铲雪都是某个特定情形下的最佳策略。有意思的是，这就不需要担心雪堆不会被铲，即(0, 0)这种最坏的结果基本不可能出现，因为即使双方不合作铲雪，也会出现纳什均衡的现象，一人独自把雪堆铲了，让道路恢复通畅。因此，合作更容易在雪堆博弈中涌现。

【问题延伸】

在现实生活中，在许多合作中都会出现雪堆博弈的现象。在项目合作的过程中，总会有少数人不愿在合作中尽力，甚至有的还把自己的任务也扔给合作者去做。这些人之所以会这么做，就是因为他们心中明白，就算自己不做，合作者也会帮自己做完，让整个项目得以顺利进行。还有，当学习好的学生和学习不好的学生一起做小组任务时，学习不好的学生就可能直接放弃，将整个任务留给学习好的学生，就是因为他心里明白，虽然两个人都不做是最差的结果，但是，就算自己不去做，学习好的人一定会争取将小组任务完成，总比最差的结果要好。

9.2.5　群体之间的斗争“鹰鸽博弈”

【背景】

以上博弈都是在个体与个体之间进行的，但在现实世界中，往往群体与群体之间也会进行博弈，尤其是在生态环境中，例如，外来物种和本地物种在争夺自然资源上就进行着博弈。捕食者和被捕食者也在不断进行着

博弈。当然，在人类社会中，也存在群体间的博弈，而在每个群体内部又包含了个体与个体之间的博弈。接下来，我们介绍一种非常典型的群体之间的博弈，叫作“鹰鸽博弈”。

【问题】

在大自然中，鹰是一种凶猛的鸟类，给人的印象是强者；而鸽的性情温和，比较瘦小，给人的印象是弱者。因此，鹰搏斗起来总是凶悍霸道、全力以赴、孤注一掷，除非身负重伤，否则决不退却。而鸽一贯都是用叫声来进行恫吓，没有伤害对手的实力，往往委曲求全。如果鹰同鸽搏斗，鸽就会迅即逃跑，因此鸽不会受到伤害；如果鹰同鹰搏斗，就会一直打到其中一只受重伤或者死亡才罢休；如果鸽同鸽相遇，那么谁也不会受伤。

现在假设每只动物在搏斗中都选择两种策略之一，即“鹰策略”或者“鸽策略”。对于为生存竞争的每只动物而言，如果自己采取“鹰策略”，而对手采取“鸽策略”，那么自己就会赢得这场博弈，收益为 2；如果对手采取“鹰策略”，而自己采取“鸽策略”，那么自己就会输掉这场博弈，收益是−1，也就是承受 1 单位的损失；如果双方都采取“鹰策略”，那么，就会两败俱伤，双方都会受到严重的伤害，这时各自的收益都是−2,；如果双方都采取“鸽策略”，此时双方相安无事、和平共处，各自的收益都是 1。

【解析】

“鹰鸽博弈”和“斗鸡博弈”非常相似，但是不同于斗鸡博弈，鹰鸽博弈是群体博弈，一个是侵略群体，另一个是和平群体。我们需要用长远的眼光来看待这场博弈的最终结果，同时还要考虑群体内部的斗争。各物种之间的鹰鸽博弈是大自然中的基本博弈现象。例如，在只有鸽子的环境里，突然加入的鹰将大大获益，并吸引同伴加入。但结果并不会是鹰将鸽

消灭干净，而是以一定比例共存，因为当鹰群过大时，由于鸽的资源是有限的，就会发生内部斗争，有一部分鹰就会被其他鹰消灭，这时候，鹰和鸽之间的均衡就已经到来了；同样的，如果鸽群数目过小，那么鹰也会为了争夺鸽群资源而发生激烈的内部斗争，这时候鹰的数量同样大量减少，直到能和鸽的数目相匹配。

从上述博弈过程中可以发现，在群体博弈和内部斗争（也是一种博弈）两者的综合作用下，鸽群和鹰群在同一个环境中按照一定的均衡比例实现了共存，这就是生态环境中物种之间的稳定现象。可以看出，在一个生态环境中，弱者并不会完全消失，强者也做不到独霸所有资源，这种均衡带来的稳定对生态环境具有非常重要的意义。

第 10 章

动态博弈：有先手和后手之分的博弈过程

前面我们讲的博弈都是静态的，即没有先手和后手之分。但是，在现实生活中，往往许多博弈过程就如同下棋一样，有先后之别，这就是动态博弈。在动态博弈中，往往先手和后手的优势各不相同，它们之间的博弈策略也会有所区别。

10.1 外行看懂动态博弈

动态博弈是一个讲究先后顺序的博弈过程，并且后手可以根据先手的行动，进一步做出自己的选择。了解动态博弈的形式，特别是学会用逆向归纳法分析现实生活中的一些博弈问题，能够帮助我们在动态博弈中做出最优的决策。

10.1.1 动态博弈的特点

生活中总有一些博弈过程，参与博弈的双方都是看对方的选择再做出自己的决策，而不像“囚徒问题”中，决策的顺序对于最后的结果并没有影响。例如，各类棋牌游戏就必须分先手和后手，因为只有这样才能出现博弈的结果，而不可能双方同时做出决策。总之，如果在博弈过程中需要按先后顺序进行决策，并且这种顺序会对博弈的最终结果产生影响，那么这种博弈就是动态博弈。与之相反的，先后顺序对于博弈结果没有影响，参与博弈的双方可以同时做出决策的博弈就称为静态博弈。

动态博弈的第一个显著特点就是多阶段，因此，动态博弈也可以被称为“多阶段博弈”。动态博弈必定要经过多个决策阶段才能出现最终的结果，对于某个单一的阶段来说，出现的结果只是暂时的，并且又成为下一阶段决策的起点。如果说像“囚徒困境”那样的静态博弈能够一蹴而就，

那么动态博弈就像卡牌类游戏，只有经过多个回合的较量才能确定最后的输赢。

动态博弈的第二个特点就是先后顺序可能会对最终结果产生影响。动态博弈中是很有可能出现“先手优势”和“后手优势”的。对于不同的动态博弈过程，初始条件对于博弈的双方不会是公平的，因为博弈的双方必须按照先后顺序进行决策，先手做完决策之后，当后手进行决策时，此时的条件已经发生了变化。例如，在象棋的很多残局中，红方和黑方的先后顺序必须是规定的，红方先手，或者黑方先手，这是因为，颠倒红黑的先后顺序，就会出现一步就能“将死”对方的情形，这是没有意义的。

动态博弈的第三个特点是当前的最优决策不一定会得到最终的最优结果。动态博弈和动态规划问题有点类似，往往我们从直觉和经验出发得到下一步的最优决策，并不能保证最后的结果是最有利的，除非我们能从逻辑上证明这次的决策对最优的结果是必不可少的。

10.1.2　逆向归纳法

不像“囚徒问题”之类的静态博弈，只需进行一次分析即可，动态博弈比静态博弈要复杂得多，当前看起来最优的决策，很有可能下一步就会受到对方决策的影响，也就是每次最优的决策，不一定会让最后得到的结果最优。这是动态博弈中的最大难点。那么，怎样才能确保最后出现的结果是对我们最有利的呢?

我们可以从一个小故事中得到启发：

甲和乙两人打赌喝酒。两人一起喝掉 9 杯鸡尾酒，谁喝得多谁就获胜，但是每个人一次最多只能拿两杯鸡尾酒，必须喝光手中的酒才可以拿新的

酒杯。比赛开始后，甲毫不犹豫地拿起两杯鸡尾酒迅速喝了起来。一旁的乙在一开始只拿了一杯鸡尾酒，急忙喝完之后，又拿起两杯鸡尾酒喝了起来。

接下来，甲喝完了最开始的两杯酒，再拿起两杯，这时候只剩下两杯鸡尾酒没人喝了。甲手中的两杯鸡尾酒还没喝完，乙手中的两杯鸡尾酒已经喝完了，拿起了最后的两杯鸡尾酒，不急不忙地喝了起来。显然，这时候的输赢已经一目了然了，甲最初只拿一杯，但是一共喝了 5 杯；乙先拿了两杯，但一共喝了 4 杯。

从上面这个小故事中可以发现，动态博弈中的每次决策都是很重要的，并不是只做一次决策就能完事的，当前看起来最优的决策并不能保证最后的结果是好的，甚至还可能导致最后得不到最优的结果。“一着不慎，满盘皆输”，这是下棋中的名言，也适合所有的动态博弈。因此，“全局思维”在动态博弈中是最重要的，不能局限于眼前利益，要考虑长远利益，能够掌握全局，这就需要预判对方的决策。

在动态博弈过程中，如果参与博弈的一方足够理智，那么轮到他做决策的时候，就会根据对方以前的行为特点，从对方的角度思考他下一阶段将会怎样选择策略，这种思考会一直持续下去，直到博弈的最后一个阶段。这时候就能预判整个博弈过程的最终结果，从而根据这个预判结果做出对自己最有利的选择。

就好比，我们在下棋过程中，新手总是在考虑怎么吃掉对方的棋子，如果能吃掉对方的棋子，那么这自然会是一个有利的决策；但是老手更多地考虑对手的下一步、下几步会怎么走，通过预判对手的招数来决定自己当前的决策，并且不以吃掉对方的棋子为目的，而始终以“将军”为目的。

像上述这样，通过预判对方的决策来推理得到自己当前的最优决策，

这就是逆向归纳法。逆向归纳法的主要步骤就是“算”，算对方接下来的招数是什么，通过严密的逻辑推理，决定自己现在的最优决策。对于逆向归纳法，首先要仔细思考自己的决策可能引起的所有后续反应，以及后续反应的后续反应，直至博弈结束；然后从最后一步开始，逐步倒推，以此找出自己在每一步中的最优决策。

10.1.3　动态博弈中的纳什均衡

动态博弈中往往也会出现纳什均衡现象，但是和“囚徒困境”中的纳什均衡有点不同。也就是说，如果参与博弈的双方都足够理智，那么在动态博弈中也可能出现一种稳定的策略组合。要分析动态博弈，就得采用逆向归纳的方法分析对手会做出什么样的决策。

要想了解动态博弈过程中的纳什均衡，我们可以从“开金矿”的博弈说起。

甲发现了一处价值 10 万元的金矿，准备进行开采，可是需要 2 万元的启动资金。现在甲手头没钱，于是，甲便向乙借 2 万元，并且许诺采到金子后与乙平分。如果你是乙，你会借 2 万元给甲吗?

上述博弈是一个典型的动态博弈，因为甲向乙提出借钱的请求，然后乙需要做出是否借钱的决策。如果借给甲，那么甲也需要进一步做出自己的决策，即是否将利益分给乙。在这个博弈过程中，甲、乙两人的决策是按照顺序进行的。

现在再来看乙在这个博弈过程中的处境。甲向乙提出借 2 万元的请求之后，乙需要决定是否答应甲的请求，这时候他最需要关心的就是甲采到金子后是否会履行诺言跟自己平分，因为万一甲采到金子后不但不跟自己

平分，而且还赖账或卷款潜逃，则乙连自己的 2 万元本钱都收不回来。而乙之所以担心借钱给甲之后，甲不会履行诺言，这是因为乙知道甲是一个理智的人，只会考虑自己的利益，以自身利益最大化为原则，甲到时候一定不会将开金矿所得的一半分给别人。

因此，乙通过分析甲接下来会做出的决策，从而得到，当前的最佳策略就是不借钱给甲。在这个博弈过程中，无论甲把诺言说得多么坚定，把许诺给乙的利益说得多么吸引人，乙的最理智的决策仍然是不借钱给甲，至少这不会让自己有什么损失，而一旦借钱，甲为了利益必定不会履行当初的诺言。总之，对乙来说，甲的诺言是不可信的。

乙的策略是不会借钱给甲，这就是该动态博弈中的纳什均衡。对于上述动态博弈过程，可以树形图来描述，如图 10–1 所示。图中左边数字表示甲的资金，右边数字表示乙的资金。从图 10–1 中也可以清晰地看出，这个动态博弈过程共分为两个阶段。

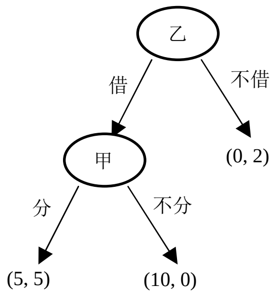

图 10–1　开金矿博弈图

那么，在怎样的情形下，甲的诺言才是可信的，并且乙也会答应借 2 万元给甲呢？要想使甲的许诺成为可信的，可以在这场博弈中再加上第三个阶段：假如甲和乙签订了具有法律效力的合约，如果甲不履行平分的协议，那么乙可以将甲告上法庭，通过法律的强制手段来确保自己的利益。这时，甲和乙之间的动态博弈过程就会变成图 10–2。

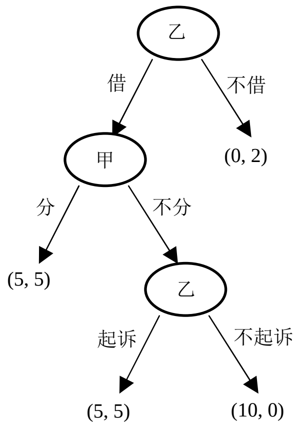

图 10-2　有法律保障的博弈

从图 10-2 中也可以看出，乙再也不用担心甲会不会履行诺言。这是因为，假设甲履行诺言，那么，把 2 万元借给甲将会给自己带来 5 万元的利益；如果甲不履行将收益平分的诺言，那么乙可以将甲告上法庭，通过法律手段同样可以获得自己应得的 5 万元。因此，对于乙来说，他会在第一阶段做出借给甲 2 万元的决策。

同样的，对于甲来说，在乙借钱给他之后，他会想到，如果自己不履行诺言，那么乙一定会起诉自己，因此，甲选择的策略一定会是遵守诺言，将所得收益的一半给乙。这时候也就达到了纳什均衡，即乙会借钱给甲，甲接下来会遵守诺言。在这个博弈过程中，甲的诺言是可信的。

更进一步，如果法律的保障并不足，在甲和乙签订了有法律效力的合约，但是甲违约之后，乙向法院起诉的花费高达 6 万元。显然，在乙起诉之后，虽然能够拿回属于自己的利益，但是需要承担 1 万元的损失，这时候，甲和乙之间的动态博弈就会变成图 10-3。

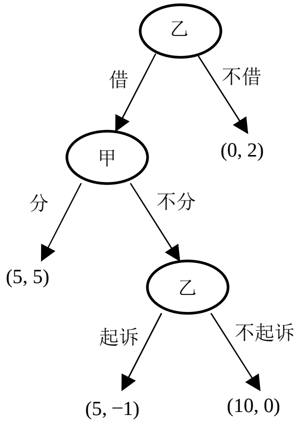

图 10-3　法律保障不足的博弈

根据图 10-3，同样利用逆向归纳法来寻找纳什均衡，可以发现：乙在借钱给甲之前，一定会考虑到甲不履行诺言之后，起诉甲比不起诉甲的损失更大，一旦这种担忧变成现实，乙将不可避免地遭受损失，这时候最佳的决策是不起诉甲，因此，乙在最开始就不会选择借钱给甲。因为甲的心里明白，即使自己违约了，乙也不会起诉自己，所以一定会在借钱之后违约。在这个博弈过程中，法律保障不足，即使有法律效力的诺言，也是不可信的。

上面三个博弈过程都采用逆向归纳法进行分析，并且都能够得到双方的稳定策略，也就是纳什均衡。这三个博弈过程也告诉我们：有效的法律保障对于一个社会的公平正义是至关重要的，如果法律保障不足，那么有法律和没有法律并不会有多大区别，都会让人产生不安全感，无法和他人进行正常的合作。换句话说，合作是建立在有法律保障的基础之上的，而不仅仅依靠人们的自我约束，后者将带来极大的风险。

10.2　生活中的动态博弈

10.2.1　市场先进者和后进者的竞争

【背景】

在自由市场上，总会有先进者和后进者，并且两者之间是竞争的关系。如果先进者已经占领了市场，后进者也选择进入市场，那么，先进者很可能想办法阻击后进者，以增加后进者的成本，压缩后进者得到的收益，直到后进者自觉退出市场；而后进者也必定会进行掂量，看先进者是否会进行阻击，进一步，是否有能力在先进者的阻击下获得利益，如果都肯定，则进入市场才是最佳策略。

【问题】

现在假设甲公司是市场上的先进者，乙公司是市场上的后进者。在乙公司未进入市场时，甲公司获得的收益是 8，乙公司没有收益。假如乙公司选择进入市场，如果没有遇到甲公司的阻击，那么两家公司就会分割市场上的利益，这时甲公司的收益是 5，乙公司的收益则是 3；如果受到甲公司的阻击，虽然甲公司阻击需要成本，但是也为自己争取了市场利益，这时，甲公司的收益是 6，乙公司的收益则是−1。

那么，乙公司将会采取怎样的市场策略呢?

【解析】

首先，将问题用树形图来描述。

对于上述这个动态博弈过程，可以用图 10−4 来表示。其中括号里面左边的数表示甲公司在该种情形下的收益，右边的数则表示乙公司的收益。

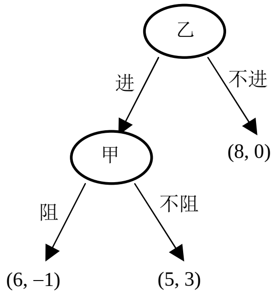

图 10-4　甲、乙两家公司博弈图（1）

其次，采用逆向归纳法进行分析。

分析博弈的第二阶段，假如乙公司进入了市场，这时候，甲公司的最佳策略一定是阻击乙公司。因为甲公司从自身的利益出发，阻击乙公司能够给自己带来更多的利益。

分析博弈的第一阶段，乙公司在考虑要不要进入市场时，通过上述分析能够预判到甲一定会采取手段进行阻击。这时候，乙公司的收益为负数，即乙公司会在市场中遭受损失。如果不进入市场，那么乙公司虽然没有收益，但也不会有损失。因此，乙公司此时的最佳策略就是不进入市场。

因此，在整个博弈过程中，甲公司的阻击是可信的，对乙公司是有威胁的，乙公司不会选择进入市场和甲公司竞争，这就是这个动态博弈过程的纳什均衡。

【问题延伸】

那么，在什么情形下，乙公司会选择进入市场呢？我们将上述博弈过程中甲公司阻击乙公司的收益变为(4, −1)，即甲公司的收益是 4，乙公司的损失是 1。这时甲公司和乙公司的博弈就会变成图 10-5。

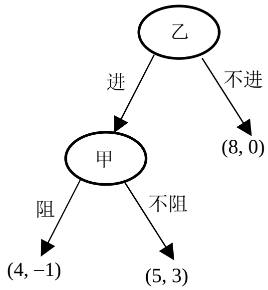

图 10-5　甲、乙两家公司博弈图（2）

同样采用逆向归纳法进行分析。

从图 10-5 中可以看出，当乙公司进入市场时，对于甲公司来说，最佳策略应该是不阻击，因为不阻击乙公司时获得的收益要多些。因此，当乙公司考虑是否应该进入市场时，就会预判到甲公司不会对自己进行阻击，进入市场的收益就会是 3，而不进入市场的收益则为 0。显然，乙公司会做出对自己更优的决策，也就是进入市场和甲公司竞争。

因此，在这个博弈过程中，乙公司选择进入市场，甲公司选择不阻击乙公司，这就是该动态博弈中的纳什均衡。这时候，甲公司的阻击是不可信的，根本不会对乙公司构成威胁，因为乙公司知道甲公司不会真的阻击自己。

通过对比上述两个动态博弈过程，就能发现，在市场竞争中，并不一定是先进者会阻击后进者，对于后进者来说，也不一定不能在市场上立足。当然，这一切取决于先进者阻击的成本，如果阻击成本很高，导致阻击后的收益下降，那么，先进者的阻击是不可信的，不可能变成现实，这就是后进者进入市场的最好机会。

10.2.2 讨价还价问题

【背景】

在现实生活中，无论是出门购物，还是商务谈判，或者债务纠纷、财产分割等，讨价还价的过程都是不可避免的。讨价还价是一个动态博弈过程，一方先出价，另一方可以选择拒绝并且接着提出自己心中的价位，也可以选择接受从而让整个博弈过程终结。

【问题】

假设甲和乙两人就如何分割 1 万元进行谈判，他们之间的谈判规则是这样的：由甲提出一个分割比例，乙可以选择接受甲的方案，也可以选择拒绝；如果乙选择接受，谈判就此完成，按照甲的方案进行分割；如果乙选择拒绝，就必须向甲提出自己的分割方案，让甲进行选择。如此循环下去，直到双方都同意，谈判才终止。

由于谈判也是需要成本的，除非双方第一阶段就能达成一致，每多进行一个阶段，要分割的资金就会损失 10%，用来提供双方谈判的花费。为了确保谈判的效率，进一步限制甲和乙之间最多只能进行三个阶段的讨价还价，如果进行第三阶段，则甲报价的时候，乙必须选择接受。

那么，甲和乙将选择怎样的分割方案呢?

【解析】

首先，将问题用树形图来描述。

对于上述问题，我们可以将这个甲和乙之间的讨价还价博弈用图 10-6 来表示。

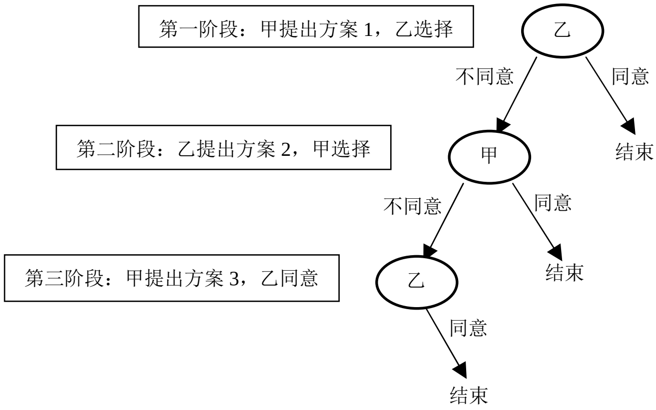

图 10-6　甲和乙之间的谈判

其次，采用逆向归纳法进行分析。

在这个博弈过程中，双方都能够充分认识到，多进行一个阶段，双方的总收益就会进一步损失 10%。因此，越早结束谈判，对双方而言都是有利的，这时候，如果能在第一阶段就提出一个双方都能接受的方案，在第一阶段结束谈判，那么这对双方来说就是最佳策略。

分析博弈的第三阶段。如果这次谈判拖到第三阶段结束，那么双方的总收益将变为 1×90%×90%，也就是 0.81 万元。在第三阶段，甲很清楚自己此时提出的方案就会是最终的分割方案，因此，甲会提出自己独吞 0.81 万元，这样甲才能得到最大的收益，而乙在此时则没有任何收益。

分析博弈的第二阶段。如果这次谈判拖到第二阶段结束，那么双方的总收益将变为 1×90%，也就是 0.9 万元。在第二阶段，乙根据自己的分析，也很清楚甲到了第三阶段一定会提出独吞的分割方案，那时候，乙将没有收益。因此，乙在第二阶段就应该提出让双方都同意的方案，尽量征得甲的同意。由于甲在第三阶段能获得 0.81 万元，因此，乙就会提出让甲分得 0.81 万元，自己获得剩下的 0.09 万元，这样才能使甲同意，并且自己的收益也能达到最大。

分析博弈的第一阶段。如果这次谈判在第一阶段就结束，那么双方的总收益就是 1 万元。在第一阶段，甲根据自己的分析，也很清楚乙会在第二阶段提出什么样的方案，那时自己的收益将会是 0.81 万元，而乙的收益会是 0.09 万元。因此，甲会想办法在第一阶段就提出双方都满意的方案，从而让自己获得更多的收益。为了拉拢乙，甲一定会提出让乙分得 0.09 万元，自己分得剩下的 0.91 万元，这时乙是可以接受这个方案的，因为如果乙不接受，到了第二阶段，乙的最大收益同样是 0.09 万元。

因此，整个谈判在第一阶段便会结束，也就得到这个动态博弈过程的纳什均衡。甲会在第一阶段提出的方案是：甲分得 0.91 万元，乙分得剩下的 0.09 万元，并且乙会选择同意这个方案，双方达成一致，整个博弈在第一阶段就结束了。

【问题延伸】

从上述博弈过程中也可以看出，甲在整个博弈中的优势是巨大的，这正是因为甲拥有最后的决定权。而甲、乙两人之所以会在第一阶段就达成一致，最主要的原因就是这场动态博弈对于双方而言都是一场消耗战。换句话说，如果整个博弈过程中没有那 10%的花费，同样是三个阶段必须结束，那么乙就不可能会有任何的收益。因为甲会一直提出自己独吞 1 万元的分割方案，即使乙不同意，这个方案也会在第三阶段被甲重新提出。

10.2.3 海盗分金问题

【背景】

“海盗分金问题”是升级版的“讨价还价问题”，最早发表在《科学》杂志上，后来又被微软公司作为面试题。分析“海盗分金问题”，更能帮助我们了解动态博弈中的纳什均衡，让我们在日常生活的动态博弈中能有更清晰的思路。下面就是最初的“海盗分金问题”。

【问题】

5 个海盗一起抢到了 100 枚金币，他们按抽签的顺序依次提出方案：首先由 1 号提出分配方案，然后 5 人表决，超过半数同意方案才被通过，否则他将被扔入大海喂鲨鱼；在剩下的 4 人中，再由 2 号提出分配方案，然后 4 人表决，同样超过半数同意方案才能通过，否则也会被扔入大海喂鲨鱼；以此类推，如果只剩下 5 号，那么这些金币就全部归他。

假如你是 1 号，你会提出怎样的方案，让自己的利益最大化呢?

【解析】

首先，将问题用树形图来描述。

对于上述问题，我们可以将这个海盗分金的博弈用图 10-7 来表示。从图 10-7 中可以看出，这个问题是一个动态博弈过程，除了 1 号，剩下的每个人都在别人的决策之后做出选择。

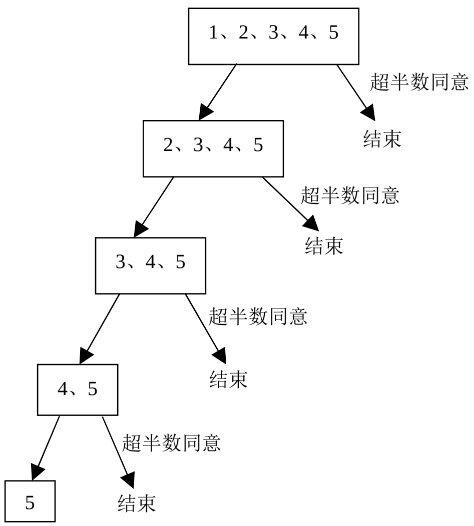

图 10-7　海盗分金的博弈过程

其次，定性地分析问题，抓住问题的本质。

第一点：除了最后的 5 号，对于每个人来说，当轮到自己做决策时，都会想尽一切办法确保一半以上的人同意自己的方案，因为只有这样才能保全自己的生命，才可能从 100 枚金币中分得一份。

第二点：除了最初的 1 号，对于每个人来说，当自己的决策顺序在后面时，都会考虑是否要拖到下一次决策，如果在下一轮决策时能取得更高的分成，那么就应该投反对票；如果下一轮决策不能使自己更有利，就会投赞成票，因为除了 5 号，对于每个人来说，拖到后面，风险越大，等到自己决策时，稍有不慎就可能被同伴扔进大海喂鲨鱼。

最后，用逆向归纳法进行分析。

从 5 号开始，如果只剩下 4 号和 5 号两个人，那么不管 4 号提出的方案是什么，5 号只要不同意 4 号的方案，就一定能够独吞这 100 枚金币。因此，5 号一定不会同意 4 号的方案，除非 4 号提出的方案是(0，100)，即将 100 枚金币全部分给 5 号。即使 4 号将 100 枚金币全部分给 5 号，5 号也可能拒绝 4 号，把 4 号扔到海里去喂鲨鱼，因为这样做并不会影响自己的利益。

显然，4 号会料到 5 号会独吞，还可能将自己扔到海里，在这场博弈中，4 号的唯一目的应该是保全自己的性命。因此 4 号一定会尽可能赞成任何 3 号提出的方案，促成 3 号的方案得到超半数人的赞成，让这场博弈尽早结束，即使 3 号的方案中没有分给自己任何一枚金币。如果 4 号没能做到这点，就会轮到他提方案，那么，4 号的性命就将由 5 号决定了。

如果轮到 3 号提出方案，那么 3 号一定知道 4 号的处境，知道自己提出的任何方案都会得到 4 号的赞成，再加上 3 号自己这一票，这时候，3

号提出的任何方案都会得到 2 票的赞成，也就是会得到执行。3 号从自己的最大利益出发，他一定会提出(100, 0, 0)，即自己独吞 100 枚金币，4 号和 5 号一枚都没有。

轮到 2 号提出方案时，2 号知道 3 号一定会反对自己提出的方案，因为 3 号这样做符合最大利益：只有 2 号的方案失败，3 号才能够提出上面的方案，让自己独吞 100 枚金币。2 号必然会放弃 3 号，拉拢 4 号和 5 号，不让自己的方案失败。因此，2 号从自己的最大利益出发，提出的方案会是(98, 0, 1, 1)，即自己分得 98 枚，4 号和 5 号各 1 枚，3 号一无所获。因为 4 号和 5 号知道这个方案一定比 3 号提出的要好，如果轮到 3 号提方案，那么 4 号和 5 号都会一无所获，所以这个方案一定会得到 4 号和 5 号的赞成。

1 号在最初提方案的时候，通过理性分析，也会料到 2 号一定会提出上述方案，1 号要想让自己的方案得到超过半数的赞成，并且自己能够得到最大的收益，则至少要争取 3 个人的赞成。如果甲想争取 2 号的赞成，则至少需要分配给 2 号 99 枚金币。因此，甲会选择放弃 2 号，不给 2 号任何金币，而想办法拉拢 3 号、4 号和 5 号中的两个人。显然，拉拢 3 号只需要 1 枚金币，再拉拢 4 号或者 5 号中的一个，只需要 2 枚金币，因此，1 号会提出的方案是(97, 0, 1, 2, 0)或者(97, 0, 1, 0, 2)。

如果所有人都足够理智，那么 1 号会在最初就提出上述方案，这个方案会遭到 2 号的反对，其中 3 号一定会赞成，4 号和 5 号中一人赞成，一人反对，最终这个方案会顺利通过。这就是这个博弈过程中的纳什均衡。从“海盗分金问题”中也可以看出，对于一些复杂的博弈问题，如果采用逆向归纳法，从最后的决策一步一步进行推理，就能够得到最优的决策。

10.2.4　委托人和代理人问题

【背景】

在现实生活中，难免会遇到需要代理人处理某些事务的时候。一方面，委托人和代理人这种关系已经成为现代社会一种司空见惯的现象，在很多领域，如证券行业、法律行业等，寻找代理人是不可避免的；另一方面，也出现许多委托人和代理人之间的矛盾，委托人如何监督代理人、代理人如何与委托人之间建立足够的信任，已经成为人们越来越关注的问题。委托人会不会选择代理人、如何选择代理人、代理人怎样为委托人工作，这些同样也是一场博弈。

【问题】

在委托人和代理人的关系中，委托人的报酬、代理人的工作态度，以及为完成工作付出的额外精力都是很重要的。因此，委托人和代理人之间的博弈可以简化为这样的一个动态博弈过程：委托人首先决定自己找不找代理人，如果不找代理人，那么他的收益只有 0，这时代理人的收益显然也为 0；如果委托人决定找代理人，代理人拒绝，同样的，委托人和代理人的收益也都是 0。

进一步，如果代理人同意代理委托人的相关事务，那么，代理人又有懒惰和努力两种工作态度。如果代理人在处理委托人的事务时偷懒，那么代理人创造的价值较低，价值是 8，自然，委托人付给代理人的报酬也会较低，付给代理人的报酬是 1。代理人如果努力工作，那么代理人创造的价值较高，价值是 10，委托人付给代理人的报酬也会较高，报酬是 2。

那么，委托人该如何选择代理人呢?

【解析】

首先，将问题用树形图来描述。

对于上述这个动态博弈过程，可以用图 10-8 来表示。其中，委托人用 1 表示，代理人用 2 表示，括号内左边数字代表委托人的收益，右边数字代表代理人的收益。注意，委托人的收益应该是代理人创造的价值减去付给代理人的报酬。

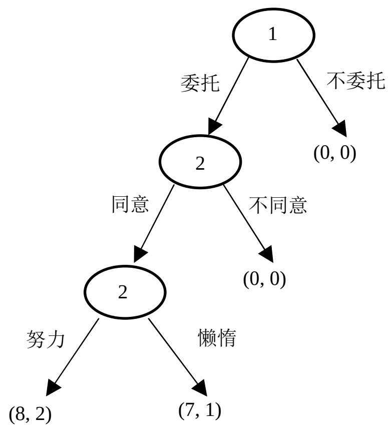

图 10-8　委托人和代理人之间的博弈

其次，运用逆向归纳法对这场动态博弈进行分析。

分析博弈的第三阶段。如果委托人选择代理人，并且代理人选择同意，那么在第三阶段，代理人会不会选择努力，这取决于努力和懒惰之间的收益谁比较大。显然，只有努力时的收益较大，代理人才会自觉地选择努力。从图 10-8 中可以看出，该代理人会选择努力，因为这会让他的收益从 1 变为 2。

分析博弈的第二阶段。代理人会不会同意接受委托人的委托，这取决于委托人给予代理人的报酬是不是充足。在上述博弈中，代理人无论工作

态度如何，他都能取得收益。显然，代理人会答应委托人的请求。

分析博弈的第一阶段。委托人之所以要找代理人，正是因为代理人能给自己带来更多收益，否则还不如不委托代理。在上述博弈中，无论代理人工作态度如何，委托人或多或少都能得到收益，因此，他会委托代理人处理自己的事务。

综合上面的分析也就得到，委托人委托代理人，代理人同意并且努力工作，这就是这个动态博弈过程中的纳什均衡。

【问题延伸】

从这个博弈过程中也可以看出，对于委托人来说，要想让代理人同意自己的委托并且自觉地努力工作，只给予代理人不错的报酬还不够，还需要采取激励措施，让代理人在努力工作时得到更多的收益。或者，对代理人的工作进行有效监督，让代理人在懒惰状态下的收益减少，代理人在这样的监督下也就不会偷懒了。

10.2.5 情侣之间的礼物

【背景】

本书的绝大部分博弈例子都假设了人是理性和自利的这个基本前提。然而在现实生活中，也有一些博弈过程并不是完全理性的，也不是从自己的利益出发的。下面这对情侣之间的博弈故事来自美国小说家欧·亨利的《麦琪的礼物》，这是一个很有深度的例子。

【问题】

吉姆和德拉是一对情侣，两人非常相爱。吉姆是一位薪金仅够维持生活的小职员，女主人公德拉是一位贤惠善良的主妇。虽然他们的生活贫穷，

但吉姆和德拉各自拥有一样极珍贵的宝物：吉姆有一块祖传的金表，德拉一头美丽的秀发。快到圣诞节了，吉姆为了给德拉送一件礼物，卖掉了他的金表，为德拉买了一套梳子；德拉为了给吉姆送一件礼物，卖掉了自己的长发，为吉姆买了一条白金表链。他们都为对方舍弃了自己最宝贵的东西，但到了圣诞节这天，他们发现换来的礼物对双方来说都变得毫无价值了。

【解析】

原故事是一个静态博弈过程。

上面这个故事有点悲情，双方都想着尽自己的一切努力送给对方最好的东西，最后换来的礼物却变得没有用处。我们可以发现，在这个故事中，双方的选择可以看成博弈的策略，由于双方都没有在做出决策之后通知对方，并且几乎是同时进行决策的，因此，故事中的博弈可以认为是一种静态博弈，只不过双方都是从对方的利益出发的。

现在假设吉姆没有卖掉金表，德拉没有卖掉秀发时，双方的利益都是3；如果吉姆卖掉金表，买了梳子送给德拉，而德拉没有卖掉秀发，这时德拉的利益是 4，吉姆的利益变为 1；如果德拉卖掉秀发，买了表链送给吉姆，而吉姆没有卖掉金表，这时吉姆的利益是 4，德拉的利益是 1；如果双方都卖掉了各自的宝物，这时双方的利益都变为 0。根据这些策略和利益，我们可以得到表 10-1。

表 10-1　情侣之间的静态博弈

德拉 / 吉姆	卖秀发	不　卖
卖金表	0, 0	1, <u>4</u>
不　卖	<u>4</u>, 1	<u>3</u>, <u>3</u>

从表 10-1 中可以看出，如果双方只从自己的利益出发，那么无论吉姆是否卖金表，德拉的最佳策略都是不卖秀发；同样的，无论德拉是否卖秀发，吉姆的最佳策略都是不卖金表。因此，双方都不卖出各自的宝物就是这场静态博弈中的纳什均衡，如表 10-1 中左右均被标记的(3, 3)。可是，当德拉和吉姆两人都从对方的利益出发时，纳什均衡就不会是他们达成的策略组合了。可见，当人们在博弈过程中表现出非理性时，那么，纳什均衡就极有可能不会是最后的结果。

但是，在上述博弈中，双方选择的策略组合恰好是对双方最不利的，使得两人都失去了原本该有的利益，没有达到两人最初的目的。这是因为，这场博弈是在缺乏沟通下的静态博弈，一方的决策没有通知另一方，一方也无法根据另一方的决策再做出自己的决定。那么这种看起来都是为了对方好，实则整体利益下降的局面能不能改变呢?

将故事变为一场动态博弈。

这时候就需要动态博弈来发挥作用了。在动态博弈中，一方根据另一方的决策再做出选择，这是能够避免这种现象的最好方法。不妨假设德拉先做出决策，做完决策之后再告诉吉姆，吉姆再做出自己的选择。这场动态博弈也有两个阶段，可以用图 10-9 表示。

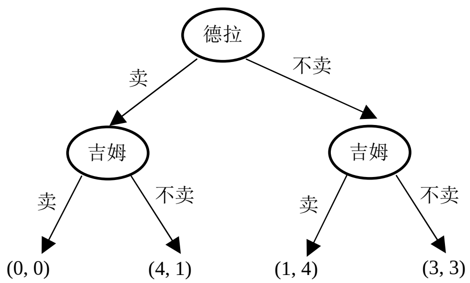

图 10-9　情侣之间的动态博弈

从图 10-9 中可以看出，双方都卖掉自己的宝贝，这对双方来说都是最差的情形。即使德拉选择将自己的秀发卖掉，但是她卖了之后便通知了吉姆，吉姆看到德拉已经将自己的秀发卖掉，买了白金表链。这时候，吉姆便不会选择将自己的金表卖掉，因为这是对他自己和德拉都没有好处的决策。因此，这就有效地避免了最差情形的出现。

从上述静态博弈和动态博弈之间的对比可以发现，生活中的动态博弈往往是建立在沟通的基础上的，在静态博弈中如果双方进行沟通，分先后做出决策，也就变成了动态博弈。这种沟通还是非常必要的，因为能够避免“两败俱伤”的最差情形出现。

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路173信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036